



TITLE:

古典描像に基づく原子核の大振幅
集団運動の微視的記述(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

飯田, 晋司

CITATION:

飯田, 晋司. 古典描像に基づく原子核の大振幅集団運動の微視的記述. 京都大学, 1985, 理学博士

ISSUE DATE:

1985-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k3235>

RIGHT:

新	制
理	
486	
京大附図	

学位申請論文

飯田 晋司

学 位 審 査 報 告

氏 名	飯 田 晋 司
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学 位 授 与 の 日 付	昭 和 年 月 日
学 位 授 与 の 要 件	学 位 規 則 第 5 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 物 理 学 第 二 専 攻
(学 位 論 文 題 目) 古典描像に基づく原子核の大振幅集団運動の微視的記述	
論 文 調 査 委 員	主 査 玉 垣 良 三 小 林 展 作、 町 田 茂

理 学 研 究 科

(論文内容の要旨)

原子核の示す大振幅集団運動，特に遷移領域核の低励起集団状態に対する微視的記述は，その強い非線型性のため，現在もなお未解決の問題である。申請論文は参考論文における研究の発展として，古典的描像に現れる運動の大域的振舞が量子系のどの様な特徴に対応するかを明らかにする観点から，2準位対相関模型を用いて行った大振幅集団運動の研究である。

核子よりなる量子多体系である原子核の大振幅集団運動に対して多く試みられるものとして時間依存変分法がある。この近似的枠組では，変分の試行関数に含まれるパラメーターは，適当な変換によって量子系に対応する古典系の正準変数と見做すことができる。一般には最初に与えた正準変数は集団運動を記述するには必ずしも適当でなく，集団自由度のみを担う変数（集団変数）と他の内部自由度を記述する変数（内部変数）へ移す正準変換を見出すこと（集団部分空間の構成）がまず必要である。次いで量子化の処法を与えることにより集団運動の記述及びそれと内部自由度の結合効果等を分析するという手順をとる。この様な取扱いを進めるには，量子系の大振幅集団運動と古典系の位相空間の広い範囲での軌道の振舞いとの対応を把握しておくことが肝要である。これを現実の系でいきなり行うことは，複雑すぎて実行可能性に乏しい。そこで申請者は，古典系と量子系との対応が比較的良好に判っている積分可能な系について，問題を考察した。

この目的のため申請者がとりあげたのは2準位対相関模型で，これは簡単ながら重要な3種の運動形態を含むものである。即ち，対称性（今の場合粒子保存則）の回復として現れる対回転，平均場のゆらぎとしての対振動及び独立粒子的運動としての準粒子励起である。

主論文は大要二つの部分より成る。前半は，古典系の構成とその解の考察である。微視的模型のハミルトニアンから，山村・栗山の与えた処法に

従って対応する古典系を構成する。この模型での正準変数は、角運動量を零に組んだ対の運動を表わすものとして2準位 ($\sigma = \pm 1/2$ で示す) に入る粒子数 N_σ と正準共軛な位相 Φ_σ 及び準粒子の運動を記述する変数である。この古典系の正準運動方程式は拘束条件を伴うので Dirac bracket を用いて記述されるが、これを解いて運動を考察する。古典系のハミルトニアンは位相を差の形 $\Psi_{+1/2} \equiv \Phi_{+1/2} - \Phi_{-1/2}$ のみで含み、保存量は全粒子数 $N = N_{1/2} + N_{-1/2}$ 、エネルギー E 、各準位のセニオリティ数 n_σ である。集団運動に着目して2自由度 ($N_{+1/2}, \Psi_{+1/2}$) についてみると、解は楕円関数を用いて表され、位相空間が三つの領域——通常のBCS状態に対応するエネルギー最小点のまわりの閉軌道群がおおう領域、内部にエネルギー停留点を含まず軌道は開いている領域、エネルギー最大点とそのまわりの閉軌道群がおおう領域——に分れる。三つの領域の境界では、古典解は不連続性をもつことが示される。

後半では、古典系がみせる不連続性がどのように量子系に反映しているかを調べている。この系は N が保存量のため積分可能であり、前期量子論の量子化処方を用いることができる。こうして得たエネルギーは正確な値に非常に近いが、エネルギー準位の様相には不連続性は見られない。古典系の不連続性は位相が時間に比例して変化する係数 $\nu(t)$ に現れる。これの量子系での対応物は、 N_σ を変化させる演算子の行列要素であり、古典系での不連続性は遷移強度分布の急激な変化に対応することが明らかにされる。さらに変数を対回転と対振動を表わす集団・内部変数を導入することによって、この変化が励起回転帯描像の破綻と理解すべきことが示される。

以上が主論文の主な内容であるが、最後にこの論文及び先行の参考論文の結果をふまえ、2準位対相関模型を用いた研究の意義と今後の研究の展望について申請者の見解を述べている。参考論文9篇の中で、(1), (2)は位相空間の広い領域に亘る軌道と量子系の情報との関連を $SU(2)$ 代数に基づき本質的に1自由度の系について考察した研究、(3), (5)は断熱近似の下で

の集団部分空間の構成とその一意性についての研究、(4)は集団運動と内部運動を記述する変数の選択に関する一般化された重心・相対運動の分離の視点からの研究、(7)は集団変数による軌道群の抽出と量子系の集団状態との対応関係の研究であり、本論文の先駆となり基礎となったものである。また参考論文(6)、(8)、(9)は、集団変数に関する量子化の処法、集団自由度と内部自由度の結合等についての研究であり、広い意味で本論文と関係する内容となっている。

(論文審査の結果の要旨)

原子核における特徴的な様相として、中重核の遷移領域にみられる低励起ではあるが大振幅の集団運動がある。これについては現象を記述する上で有用な模型はあるが、その強い非線型性のために微視的理論の構築はなお未解決の問題となっている。申請者は一連の参考論文において、集団運動部分空間の構成、古典系にみられる大振幅運動の特徴と量子系におけるその反映について研究を行ってきた。主論文はこれらの研究の延長上に位置するものである。

大振幅集団運動の微視的理論を構成するには、集団自由度と内部自由度を記述する変数の選択と安定点近傍に止まらず大域的な運動の把握が重要である。現在の理論の段階では、これを現実の原子核を対象として具体的に実行することは甚だ困難であり、実行のための指針を見出し、理論的処法を創り出すことが望まれる。この意味で、申請者が主論文でとりあげた2準位対相関模型は簡単ではあるが重要な運動形態を含む微視的模型であり、それより構成した古典系の振舞と対応する量子系の様相を解明する上で有用なものである。得られた内容として、古典系で三つに分れた位相空間の境界に現れる不連続性は量子系のエネルギー準位には顕在化せず遷移強度分布に強く反映する、という結論は非常に興味深く且新しい知見である。

現実の原子核においては、この模型で無視されている残留相互作用を通じて対相関運動モードと他の運動モードが結合する。従って、主論文で得られた結果が直接このまゝの形で現象することは期待すべきでなく、この研究は大振幅集団運動の微視的記述法の模索における一つの例題と位置づけられるべきであろう。主論文の記述の夫々の段階で示された理論的考察は特定の模型に局限されない内容を包含しており、全体の論理構成も極めて明確である。

主論文は申請者が参考論文で行ってきた大振幅集団運動に関する微視的理論の研究を一層発展させたものであり、申請論文の意義は参考論文とあわせた一連の研究として達成した成果で評価されるべきである。参考論文9篇は、(9)を除いて共著となっているが、申請者の寄与は充分であり、夫々の段階での理論の発展を担ったものである。従って、申請論文はこの分野の研究の進展に貢献するところ大であり、また申請者の優れた研究能力と学識を示している。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。

なお、主論文及び参考論文に報告されている研究業績を中心とし、これに関連した研究分野について試問した結果、合格と認めた。

古典描像に基づく原子核の大振幅集団運動
の微視的記述

京都大学大学院理学研究科
物理学第二専攻

飯 田 晋 司

概略

古典描像に基づく原子核の大振幅集団運動の解析の例題として 二準位対相関模型の古典解の大域的性質を調べそれがどの様に元の量子系に反映するかを考察した。古典軌道の形に従ってこの系の phase space が三つの領域に分けられる事,更に,運動方程式を楕円関数を使って解析的に解く事により古典解がそれぞれの領域の境界で不連続性を持つ事を示した。この不連続性は量子系におけるI_{1/2}と固有状態間の遷移強度分布の急激な変化に関連づけられ,更に,それぞれ対回転・対振動運動を表すと期待される集団・内部変数の導入によってこれが対回転帯描像の破綻として解釈できる事を示した。

目次

§ 1. 序	/
§ 2. 対相関模型に対する古典論	4
§ 3. 2-準位対相関模型の古典解	7
§ 4. 古典系における不連続性の量子系での反映	17.
§ 5. 対回転運動と対振動運動	21.
§ 6. 結論と今後の展望	24.
付録(A) Grassmann 変数を含む場合に一般化された Poisson Bracket	27.
付録(B) 楕円積分の手順	29.
付録(C) 一般化された重心座標と相対座標への変数の分離	33.
参考文献	39.
図の説明及び図	42.

§ 1 序

原子核の示す集団現象の特徴は、一つには構成要素である核子やその間に働く核力の特有さに起因する他に見られない集団運動様式が現れる事、¹⁾次には原子核が有限量子多体系であることによって個々の核子の独立粒子的運動状態と原子核全体の集団運動とが複雑に関連した Pauli 効果等による大きな量子効果の結果として総じて強い非調和性を示す事、にあると考えられる。特にこの非調和性については、原子核に振動的あるいは回転的と見なされる $I=0$ 準位が見いだされて以来、半現象論的な Bohr-Mottelson の統一模型の枠組²⁾で、あるいは、1960年前後から準粒子乱雑位相近似(RPA-法)を出発点として始められた集団運動の微視的な記述の試みにおいて、多くの研究がなされている。^{3), 5)}これらの分析を通して、それまで原子核に対して抱かれていた、閉殻近傍の球形・振動領域と閉殻から離れた変形・回転領域及びそれに加えての若干の非調和性という描像は大きく変更を加えられ、むしろ振動とも回転とも言えない両者の間の遷移領域が原子核において普遍的に現れる事が認識されてきた。更に、当初に低励起の振動的状態に対して、液滴の表面振動あるいは RPA-法による記述から抱かれた単純な phonon 的描像はむしろ後に見つかった高励起領域における (Iso-Scalar 型) 巨大共鳴状態に相当であり、⁶⁾低励起領域の集団状態は種々の運動様式の結合の中から生じる複雑なものである事、⁷⁾しかも単に複雑であるだけでなく例えば準回転帯に典型的に見られる様にその中に幾つかの規則性が存在する事が明らかになってきた。この様な背景を踏まえ、また一方では重イオン加速技術の進展により原子核の融合、分裂反応や深部非弾性散乱、等の実験データが豊富に出だした事に刺激され、運動の非調和性を適切に取り込み、更に、運動の過程でその運動様式が大きく変わる場合にも適応できる、いわゆる大振幅集団運動の理論を作る必要性が認識され 1970年代中盤以降いろいろな試みがなされてきている。^{9), 10)}

これらの中で、時間依存変分原理に基づく記述は現在に至るまで二つの大きな進展を経ていると思われる。その一つは理論構造に関する理解の進展で、まず、Boson展開との対応関係の分析や経路積分法を経る導出法の研究を通して時間依存変分法による記述が正確な取扱いのどの様な近似になっているかがある程度明らかになってきた事、次に、時間依存変分法は試行関数を指定するパラメータに対する微分方程式を導くのであるがこの方程式はある種の条件の下で(例えば Time-Dependent Hartree-Fock (Bogoliubov) 法はこの条件を満たす)パラメータ空間に正準構造を自然に導入する事、即ちこの方程式は通常の古典力学における Hamilton の運動方程式と同等の構造を持つ事が明かにされた。^{11), 12)}二つめの進展は数値計算技術の向上により、時間依存変分法が現実的な場合についてある程度計算可能になった事で、Coulomb 障壁以上のエネルギーに対する融合過程の断面積や深部非弾性散乱における反応の特徴の再現などに成功を収めた。^{13), 14)}しかし、上に述べたこの方法の古典的な性格により、量子効果が直接関係する様な現象、例えば障壁透過現象や、特に上述の非調和性の大きな束縛状態に対して適用した場合、この方法から得られる古典的な情報からの元の量子系の情報を得るための作業(量子化の手続き)が必要であり、現実的な状況での計算はあまりない。^{20), 21)}この様に時間依存変分法は正確な量子力学的取り扱いに対する一種の古典近似となっており、その事に起因する困難さを含むものの、古典軌道を追う事により量子力学における通常の振動的方法では取り扱えない強い非調和性を取り込む可能性を持つ事、また Bohr-Mottelson の統一模型によって示された平均場の運動としての集団運動という描像に最も忠実

である事、更に同模型の現象論的な適応の成功によって、古典描像に基づく記述が集団状態に対しては良いと期待される事、等から原子核における低励起集団状態の記述に対して有力な試みの一つと考えられている。

ここで古典描像は複雑な量子系の問題への一つの近似法として現れるのであるが、同時にその描像に基づいて元の量子系の現象に対して明解な物理的解釈を与え理解を更に深めるという積極的な役割を果たす可能性を持つ。例えば、原子核の示す種々の相転移は自己無撞着に決められた一体場(Hartree-Fock(Bogoliubov)状態、これは時間依存変分法の定常解である)の導入とその変形という描像によって明解に理解される⁵⁾。また Hartree-Fock 状態は古典描像ではその系を記述する Hamiltonian の最小値を与える phase space 中の点に対応するが、そのまわりの微小運動の線形近似による解析が RPA-法の行っている事である。RPA-法は単に励起エネルギーや遷移確率の値を計算する処方としてだけでなく、基底状態の安定性と関連して相転移の過程に一つの描像を与える(集団状態のワウ化とその極限としての変形)²²⁾。

上の例の様に基底状態及びその近傍での運動の解析は多く行なわれているが、最初に述べた様な大振幅運動を古典描像に基づいて理解する為には古典系の phase space の広い領域にまたがる一般の軌道の解析が更に必要であろう。しかしながら、通常非線形な Hamilton 系の古典軌道は非常に複雑な振舞を示し古典系の情報から量子系の情報を引き出す手続きが未解決の大問題であり、更に古典系のどの様な情報が量子系の近似としての意味を持つかも不明である²⁴⁾。ただ、Hamilton 系が(近似的に)積分可能な場合にのみ前期量子論の枠組で古典系の不変トラスを量子系の定常状態に結び付ける事ができる(Einstein-Brillouin-Keller の量子化則)²⁵⁾。従って、まず最初にこの様な古典系と量子系の対応が比較的よくわかっている積分可能な系について、古典系の大域的な振舞が量子系のどの様な情報を担っているかを調べる事が必要と思われる。

この論文の目的は、大振幅集団運動を表す模型として 2準位対相関模型を例にとり上述の古典系の大域にわたる描像がどの様に元の量子系に反映するかを調べる事である。この模型は 2本の一粒子準位からなり、その粒子間に対相関力のみが働く。これは、原子核の主要な残留相互作用の中で対相関力のみを焦点をあてた最も単純化された殻模型で、対相関力による通常状態から超伝導状態への相転移あるいは集団運動である対回転運動や対振動運動の機構を調べるために過去、用いられた^{26), 27)}。この模型は上の相転移に伴って起こる対称性を回復する運動である対回転運動、平均場の振動としての対振動運動そして独立粒子的運動である準粒子の励起という 3種の異なる運動状態を有し、その意味で複雑な模型である。更に、以下に見る様に強い非調和性を持つ大振幅運動を起こすこと、また対応する古典系の運動の様相が系のエネルギーに従って不連続に変化する等の性質を持つこと³¹⁾から、詳細に古典系と量子系の対応を調べる事に興味があると思われる。

以下、§2 では引用文献(32)に従って、時間依存変分原理に基づいて一般の対相関模型に対する古典系を考察する。ここにおいては通常の平均場の運動を表す変数に加えて、独立粒子的運動を古典系で直接扱う変数として Grassmann 変数が導入される^{28), 29)}。§3 では 2準位対相関模型に対して上の手続きにより対応する古典系が作られ、その運動が考察される。この系の運動方程式の解は楕円関数を使って解析的に解く事ができ、古典軌道の形に従って phase space が三つの領域に分割される。古典解はそれぞれの領域の境界で不連続性を持つ。次に §3 で得られた古典系の様相がどの様に量子系に反映するかを特に上述

の古典解の不連続性に焦点をあてて調べる。§4ではこれが \mathbb{R}^2 -の固有状態間の遷移強度分布の急激な変化に関連づけられる事が示される。更に §5 では引用文献(35)に従って、それぞれ対回転・対振動運動を表すと期待される集団・内部変数が導入され、この変数の分離に基づいて、古典系に現れる不連続性が励起対回転帯描像の破綻として解釈できる事を示す。§6 では結果のまとめと今後の展望が述べられる。

*1 Trace 公式 $\text{Tr}[1/(\mathbb{E}-\hat{H})]$ の経路積分表現に定常位近似を用いる事によって一般の非可積分系に対する量子化則が提示され研究されている。³³⁾

*2 一般に保存則等により、本質的に一次元の問題に帰着される $SU(2)$ -模型は楕円関数を用いて解析的に表わす事ができる。³⁴⁾

§ 2. 対相関模型に対する古典論

この章では、以下の準備として、一般の対相関模型に対する古典論を、山村、栗山の仕事(引用文献(32))に従って述べる。

対相関模型の Hamiltonian は、次の演算子によって生成される。

$$\hat{P}_\alpha = \sum_{m_\alpha} (-)^{j_\alpha - m_\alpha} \hat{C}_{-\alpha} \hat{C}_\alpha \quad , \quad (2.1a)$$

$$\hat{N}_\alpha = \sum_{m_\alpha} \hat{C}_\alpha^\dagger \hat{C}_\alpha \quad , \quad (2.1b)$$

ここで $\hat{C}_\alpha, \hat{C}_\alpha^\dagger$ は Fermion の生成・消滅演算子であり記号 $\pm\alpha$ は一粒子準位を示す量子数 ($n_\alpha, l_\alpha, j_\alpha, m_\alpha$) を表す。演算子 \hat{P}_α は2粒子を角運動量 0 に組む働きを持つ。まず対相関力によって変形した一体場の運動を表すため、上の対演算子によって生成される次の BCS 型の波束³⁾を考える。

$$|c_\alpha\rangle = \hat{U} |0\rangle \quad , \quad (2.2a)$$

$$\hat{U} = e^{\hat{\xi}} \quad , \quad \hat{\xi} = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\hat{P}_\alpha^\dagger \Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha^* \hat{P}_\alpha) \quad , \quad (2.2b)$$

ここで、 $|0\rangle$ は Fermion の真空 ($\hat{C}_\alpha |0\rangle = 0$) を表す。新しい真空 $|c_0\rangle$ は $\Gamma_\alpha, \Gamma_\alpha^*$ の時間変化に従って運動する。これは対相関力によって角運動量を 0 に組んだ ($J^\pi=0^+$) 2粒子対の運動を古典的に表したものである。従ってこの運動は seniority 数 ($J^\pi=0^+$ に組まない核子数) が 0 であり量子力学的には対回転、対振動運動³⁰⁾を表す。この新しい真空に対して、準粒子 \hat{a}_α が次の様に定義される。

$$\hat{a}_\alpha = \hat{U} \hat{C}_\alpha \hat{U}^\dagger = U_\alpha \hat{C}_\alpha - V_\alpha (-)^{j_\alpha - m_\alpha} \hat{C}_{-\alpha}^\dagger \quad , \quad (2.3a)$$

$$U_\alpha = \cos |\Gamma_\alpha| \quad , \quad V_\alpha = \sin |\Gamma_\alpha| \quad \Gamma_\alpha / |\Gamma_\alpha| \quad , \quad (2.3b)$$

U_α, V_α は次の関係式を満たす。

$$U_\alpha^2 + V_\alpha^* V_\alpha = 1 \quad , \quad (2.4)$$

上の準粒子は seniority 数を担う運動を引き起こすが、これらを古典的に表現する為、次の Fermion coherent state を $|c_0\rangle$ から作る。

$$|c\rangle = \hat{V} |c_0\rangle \quad , \quad (2.5a)$$

$$\hat{V} = e^{\hat{\tau}} \quad , \quad \hat{\tau} = \sum_\alpha (\hat{a}_\alpha^\dagger z_\alpha - z_\alpha^* \hat{a}_\alpha) \quad , \quad (2.5b)$$

上で、 z_α や z_α^* は Grassmann 数³³⁾であり

$$z_\alpha z_\beta^* = -z_\beta^* z_\alpha \quad , \quad z_\alpha z_\beta = -z_\beta z_\alpha \quad , \quad (2.6a)$$

$$z_\alpha \hat{a}_\beta^\dagger = -\hat{a}_\beta^\dagger z_\alpha \quad , \quad z_\alpha \hat{a}_\beta = -\hat{a}_\beta z_\alpha \quad , \quad (2.6b)$$

等を満たす。 $|c\rangle$ は通常の Boson coherent state に類似の次の性質を持つ。

$$\hat{a}_\alpha |c\rangle = z_\alpha |c\rangle \quad , \quad \langle c | \hat{a}_\alpha^\dagger | c \rangle = z_\alpha^* \quad , \quad (2.7a)$$

$$\langle c | \hat{a}_\alpha^\dagger = \langle c | z_\alpha^* \quad , \quad \langle c | \hat{a}_\alpha | c \rangle = z_\alpha \quad (2.7b)$$

Grassmann 数 z_α, z_α^* は準粒子 ($\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\alpha^*$) の古典的対応物と見なされる。この準粒子 coherent state $|c\rangle$ を使って 量子系の演算子 \hat{O} は次の様に古典量 \mathcal{O} に変換される。

$$\mathcal{O} = \langle c | \hat{O} | c \rangle \quad (2.8)$$

例えば, $\hat{N}_\alpha, \hat{P}_\alpha$ や \hat{C}_α は次の様に写像される。

$$\langle c | \hat{N}_\alpha | c \rangle = V_\alpha^* V_\alpha (\Omega_\alpha - 2\nu_\alpha) + \nu_\alpha + U_\alpha V_\alpha^* \pi_\alpha + U_\alpha V_\alpha \pi_\alpha^* \quad (2.9a)$$

$$\langle c | \hat{P}_\alpha | c \rangle = U_\alpha V_\alpha (\Omega_\alpha - 2\nu_\alpha) + U_\alpha^2 \pi_\alpha - V_\alpha^2 \pi_\alpha^* \quad (2.9b)$$

$$\langle c | \hat{C}_\alpha | c \rangle = U_\alpha \bar{z}_\alpha + V_\alpha (-)^{J_\alpha - m_\alpha} \bar{z}_{-\alpha}^* \quad (2.9c)$$

$$\nu_\alpha = \sum_{m_\alpha} \bar{z}_\alpha^* \bar{z}_\alpha, \quad \pi_\alpha = \sum_{m_\alpha} (-)^{J_\alpha - m_\alpha} \bar{z}_{-\alpha} \bar{z}_\alpha \quad (2.9d)$$

$$\Omega_\alpha = 2J_\alpha + 1 \quad (2.9e)$$

上の手続きで, 種々の演算子の古典的対応物が, $\Gamma_\alpha, \Gamma_\alpha^*$ と z_α, z_α^* を使って書き表わせるが, これらの変数は正準変数ではない。次に, 正準変数を使ってこれらを表す事を考える。正準変数として $\{N_\alpha, \Phi_\alpha, x_\alpha, x_\alpha^*\}$ を採る。正準変数条件として以下の³⁶⁾

$$\langle c | i\partial \bar{x}_\alpha | c \rangle = N_\alpha \quad (2.10a)$$

$$\langle c | -i\partial N_\alpha | c \rangle = 0 \quad (2.10b)$$

$$\langle c | \partial x_\alpha | c \rangle = -\frac{1}{2} x_\alpha^*, \quad \langle c | \partial x_\alpha^* | c \rangle = \frac{1}{2} x_\alpha \quad (2.10c)$$

を課す。特に N_α が α で指定される一粒子準位の全粒子数を表すという条件:

$$N_\alpha = \langle c | \hat{N}_\alpha | c \rangle \quad (2.11)$$

の下で方程式 (2.10a)-(2.10c) は以下の解を持つ,

$$U_\alpha = \sqrt{1 - \frac{N_\alpha - n_\alpha}{\Omega_\alpha - 2n_\alpha}}, \quad V_\alpha = \sqrt{\frac{N_\alpha - n_\alpha}{\Omega_\alpha - 2n_\alpha}} e^{2i\bar{\Phi}_\alpha}, \quad \bar{z}_\alpha = x_\alpha e^{-i\bar{\Phi}_\alpha}, \quad (2.11a)$$

$$n_\alpha = \sum_{m_\alpha} x_\alpha^* x_\alpha = 2\nu_\alpha \quad (2.11b)$$

但し, 変数 x_α, x_α^* は系を記述する変数として新たに N_α, Φ_α を導入した事による拘束条件:

$$P_\alpha = \sum_{m_\alpha} (-)^{J_\alpha - m_\alpha} x_{-\alpha} x_\alpha = 0, \quad P_\alpha^* = 0 \quad (2.12)$$

を満たす必要がある。³⁴⁾ このような拘束条件付きの古典力学系は通常の Poisson Bracket (Grassmann 数を含む拡張された意味での Poisson Bracket については付録(A)を参照) に拘束条件を考慮した Dirac による Dirac Bracket によって記述される。³⁷⁾ 現在の場合には Dirac Bracket は具体的には以下の様になる:

$$[N_\alpha, e^{i\bar{\Phi}_\beta}]_D = \delta_{\alpha\beta} e^{i\bar{\Phi}_\beta} \quad (2.13a)$$

$$[x_\alpha, x_\beta]_D = \delta_{\alpha\beta} - 2(-)^{J_\alpha - m_\alpha} x_{-\alpha}^* \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\Omega_\alpha - 2n_\alpha} (-)^{J_\alpha - m_\beta} x_{-\beta} \quad (2.13b)$$

$$[\text{その他の組み合わせ}]_D = 0 \quad (2.13c)$$

以下の議論では、古典系の結果しか使わないが、上式 (2.11a)~(2.11b) に対して正準量子化則を適用すると、対相関力により角運動量 0 に組んだ 2 核子対の運動を Boson-自由度で表した Boson quasi-Fermion 展開が以下の様に得られる。^{*2}

$$\hat{Q}_a = \sqrt{1 - \frac{\hat{N}_a - \hat{n}_a}{\Omega_a - 2\hat{n}_a}} e^{-i\hat{\Phi}_a} \hat{\chi}_a + (-)^{j_a - m_a} \hat{\chi}_{-a}^+ \cdot e^{-i\hat{\Phi}_a} \sqrt{\frac{\hat{N}_a - \hat{n}_a}{\Omega_a - 2\hat{n}_a}}, \quad (2.14)$$

上の演算子の間の交換、反交換関係は式 (2.13) を演算子に置き換えて以下で得られる。:

$$[\hat{N}_a, e^{i\hat{\Phi}_b}]_- = \delta_{ab} e^{i\hat{\Phi}_b}, \quad [,]_- \text{ は交換子を表わす}, \quad (2.15a)$$

$$[\hat{\chi}_a, \hat{\chi}_b]_+ = \delta_{ab} - 2(-)^{j_a - m_a} \hat{\chi}_{-a}^+ \frac{\delta_{ab}}{\Omega_a - 2\hat{n}_a} \cdot (-)^{j_b - m_b} \hat{\chi}_{-b}$$

$$; [,]_+ \text{ は反交換子を表わす}, \quad (2.15b)$$

$$\hat{n}_a = \sum_{m_a} \hat{\chi}_a^+ \hat{\chi}_a \quad (2.15c)$$

$$[\text{他の組合わせ}]_{\pm} = 0 \quad (2.15d)$$

1 式 (2.14) と比較してこの拘束条件は x_a, x_a^ の担う運動から角運動量を 0 に組む様なものが除かれる事を示す。即ちその様な運動は全て新たに導入した変数 (N_a, Φ_a) によって表わされる。従って式 (2.11b) の n_a は seniority 数の古典系での表現である事がわかる。

*2 この表式は参考文献 (38) において得られた Boson 展開法による結果と Physical space への射影演算子の有無を除いて同等である。

§3. 2-準位対相関模型の古典解

この章では §2 で得られた対相関模型に対する古典論を特に、その最も簡単な場合である2-準位模型³⁹⁾について適用しその古典解を得る。

考える系の Hamiltonian 演算子は

$$\hat{H} = \epsilon \sum_{\sigma} \hat{N}_{\sigma} - G/4 \cdot (\sum_{\sigma} \hat{P}_{\sigma}^{\dagger}) (\sum_{\sigma} \hat{P}_{\sigma}) \quad , \quad \sigma = \pm 1/2 \quad , \quad (3.1)$$

それに対する古典系での Hamiltonian は式(2.9a)~(2.9b) を使って

$$\mathcal{H} = \epsilon \sum_{\sigma} N_{\sigma} - G/4 \cdot (\sum_{\sigma} P_{\sigma}^*) (\sum_{\sigma} P_{\sigma}) \quad , \quad (3.2a)$$

$$= f(N = N_{+1/2} + N_{-1/2}) + g(N_{\sigma}, n_{\sigma}) - h(N_{\sigma}, n_{\sigma}) \cos(2\Xi_{\sigma+1/2} = 2(\Xi_{+1/2} - \Xi_{-1/2}))$$

$$f(N) \equiv -\epsilon/2 \cdot N - G/4 \cdot N(\Omega - N) \quad , \quad (3.2b)$$

$$g(N_{\sigma}, n_{\sigma}) \equiv \epsilon N_{\sigma+1/2} - G/2 \cdot N_{\sigma+1/2} \cdot N_{\sigma-1/2} + G/4 \cdot [\Omega(N_{\sigma+1/2} + N_{\sigma-1/2}) - (N_{\sigma+1/2}^2 + N_{\sigma-1/2}^2)] \quad , \quad (3.2c)$$

$$h(N_{\sigma}, n_{\sigma}) \equiv G/2 \cdot \sqrt{(N_{\sigma+1/2} - n_{\sigma+1/2})(\Omega - N_{\sigma+1/2} - n_{\sigma+1/2})(N_{\sigma-1/2} - n_{\sigma-1/2})(\Omega - N_{\sigma-1/2} - n_{\sigma-1/2})} \quad , \quad (3.2d)$$

と書ける。この系には拘束条件 (式(2.12)) が課せられる。

$$P_{\sigma} = \sum_m (-j)^{j-m} x_{\sigma, -m} \cdot x_{\sigma, m} = 0 \quad , \quad P_{\sigma}^* = 0 \quad (3.3)$$

この系の正準変数 $\{N_{\sigma}, \Phi_{\sigma}, x_{\sigma}, x_{\sigma}^*\}$ の時間発展は Dirac Bracket (式(2.13a)~(2.13c)) を使った Hamilton の運動方程式によって定められる;

$$\dot{N}_{\sigma} = 1/i [N_{\sigma}, \mathcal{H}]_D \quad , \quad \dot{\Phi}_{\sigma} = 1/i [\Phi_{\sigma}, \mathcal{H}]_D \quad , \quad (3.4a)$$

$$\dot{x}_{\sigma} = 1/i [x_{\sigma}, \mathcal{H}]_D \quad , \quad \dot{x}_{\sigma}^* = 1/i [x_{\sigma}^*, \mathcal{H}]_D \quad , \quad (3.4b)$$

上の運動方程式は拘束条件:式(3.3)を自動的に満たす。

$$\dot{P}_{\sigma} = 0 \quad , \quad \dot{P}_{\sigma}^* = 0 \quad , \quad (3.5)$$

更に、Hamiltonian が $\Xi_{\sigma+1/2} = \Phi_{\sigma+1/2} - \Phi_{\sigma-1/2}$ の形でしか角度座標に依存しない事から、この系は次の運動の恒量を持つ:

$$\dot{N} = 0 \quad , \quad N \equiv N_{+1/2} + N_{-1/2} \quad , \quad (3.6a)$$

$$\dot{n}_{\sigma} = 0 \quad , \quad n_{\sigma} \equiv 0 \quad (3.6b)$$

これらはそれぞれ、全粒子数及び各準位の seniority 数が保存される事を示す。この章の目的は上の運動方程式を解く事である。式(3.6)を考慮しながら運動方程式(3.4)を具体的に書き表わすと次の様になる:

$$\dot{N}_{+1/2} = -2h \sin(2\Xi_{+1/2}) \quad , \quad (3.7a)$$

$$\dot{N}_{-1/2} = 2h \sin(2\Xi_{-1/2}) \quad , \quad (3.7b)$$

$$\dot{\Xi}_{+1/2} = f_{N_{+1/2}} + g_{N_{+1/2}} - h_{N_{+1/2}} \cos(2\Xi_{+1/2}) \quad , \quad (3.8a)$$

$$\dot{\Xi}_{-1/2} = f_{N_{-1/2}} + g_{N_{-1/2}} - h_{N_{-1/2}} \cos(2\Xi_{-1/2}) \quad , \quad (3.8b)$$

$$i\dot{x}_{\sigma, m} = H_{\sigma}(x_{\sigma, m} - (-j)^{j-m} x_{\sigma, -m}^* \sum_{\sigma} P_{\sigma}) \quad , \quad (3.9a)$$

$$i\dot{x}_{\sigma, m}^* = -H_{\sigma}(x_{\sigma, m}^* - P_{\sigma}^* \sum_{\sigma} (-j)^{j-m} x_{\sigma, -m}) \quad , \quad (3.9b)$$

$$\dot{Z}_{\sigma} \equiv 2/\sum_m (x_{\sigma, m} x_{\sigma, m}^* - x_{\sigma, m}^* x_{\sigma, m}) \quad , \quad (3.9c)$$

ここで f, g, H 等は f, g, H の $N_{\pm 1/2}$ や n_{σ} についての微分を表す。上式を与えられた運動の恒量(式(3.5)~(3.6))の下で解く。特に我々は集団的な励起状態に対する古典系での運動に興味があり、Grassmann 変数 $x_{\sigma, m}, x_{\sigma, m}^*$ は個別粒子的な運動を表すと考えられるので以下の考察は $n_{\sigma} = 0$ の場合に限って行うこととする。即ち運動の恒量は次の値を取るとする:

$$N = N, H = E, \quad (3.10a)$$

$$n_{+1/2} = n_{-1/2} = 0 \quad (3.10b)$$

$$p_{+1/2} = p_{-1/2} = 0 \quad (3.10c)$$

$n_{\sigma} \neq 0$ の場合についても、多少複雑になるが同様の取扱いが可能である。次に解の大局的な振舞を見るために $(\Psi_{+1/2}, N_{+1/2})$ 平面に於ける等I値-曲線を眺めてみる。等I値-曲面は式(3.2)と(3.10)により次によって与えられる:

$$\cos(2\Psi_{+1/2}) = (g^{(0)}(N_{+1/2}, N_{-1/2} = N - N_{+1/2}) - W) / h^{(0)}(N_{+1/2}, N_{-1/2} = N - N_{+1/2}), \quad (3.11)$$

ここで W 及び $g^{(0)}, h^{(0)}$ は次式によって定義される。

$$E = W + f(N) \quad (3.12a)$$

$$g^{(0)}(N_{\sigma}) = g(N_{\sigma}, n_{\sigma} = 0), \quad h^{(0)}(N_{\sigma}) = h(N_{\sigma}, n_{\sigma} = 0) \quad (3.12b)$$

Hamiltonian は $\Psi_{+1/2}$ を $\cos(2\Psi_{+1/2})$ の形でのみ含んでいるから等I値-曲線は周期 π で同じ位-が現れる。一方 N_{σ} は、元もとの量子系が Fermion から成ることを反映して、物理的に意味のある領域(physical space)に制限が課せられる。^{*1} この系の場合には、式(2.11)からわかる様に、 N_{σ} は準位 σ に於ける全粒子数を表しそのとりうる値は次の様になる:

$$0 \leq N_{\sigma} \leq \Omega \quad (3.13)$$

従って、運動の恒量 N と n_{σ} が式(3.10)で与えられた時、 N_{σ} の取りうる値は

$$0 \leq N_{\sigma} \leq N, \quad \text{if } 0 \leq N \leq \Omega \quad (3.14a)$$

$$N - \Omega \leq N_{\sigma} \leq \Omega, \quad \text{if } \Omega \leq N \leq 2\Omega \quad (3.14b)$$

の様になる。以下では特に式(3.14a)の場合について議論を行う。図(3.1)に $N < \Omega$ の場合の古典軌道(等I値-曲面の $N_{+1/2} - \Psi_{+1/2}$ 平面への射影)を示す。記号 \bigcirc 及び Δ は系の取り得る最小I値- $E(L)$ 及び最大I値- $E(H)$ に対応する phase-space の点を表す。図より全 phase-space が、パラメタの特別な場合 ($\varepsilon = 0, G = 0$) を除いて、軌道の形に従って 3つの領域に分かれる事がわかる。それぞれの領域の境界は $E = E(-)$ 及び $E = E(+)$ ($V = V(-), V = V(+)$) に対する軌道により定められる。 $V(\pm)$ の値は以下の様になる:

図 3.1

$$V(-) = 0, \quad V(+)=eN \quad (3.15)$$

最初の領域 ($V(L) < V < V(-)$) は I 軸の最小点とそのまわりをまわる閉軌道群によってつくられる。2番目の領域 ($V(-) < V < V(+)$) はその内部に I 軸の停留点を含まず軌道は開いている。3番目の領域 ($V(+)<V<V(H)$) は I 軸-最大点とそのまわりの閉軌道からなる。 $G=0$ (対相関力がない) 場合は1番目と3番目の領域がなくなり、従って停留点は存在しない。また $e=0$ (2準位が縮退している) 場合、第2領域はなくなる。 $N>\Omega$ に対しても軌道は同様の振舞を示し一般に phase-space は 3つの領域に別れる。一方、図(3.2)は $N=\Omega$ の場合を示し、 $e>G\Omega$ に対しては第2領域のみ、 $0<e<G\Omega$ に対しては第1及び第2領域、 $G=0$ に対しては第1領域のみからなる。以下に見る様に $N=\Omega$ の場合は他の $N\neq\Omega$ の場合と異なった振舞を示す事を注意しておく。ここで最小 I 軸-を与える点 O に対応する波束(2.2)はちょうど Hamiltonian (3.1) に対する BCS-状態⁵⁾になっている、そして第1領域の運動は対相関力によって作られる一体場の BCS-状態のまわりでの揺らぎを古典系で表したものである。従って、第1領域の存在は BCS-方程式に非自明な解がある事、即ちこの系の基底状態が超伝導状態である事を示す⁵⁾。しかし量子力学的な零点振動まで考えると、たとえ BCS-方程式に解があっても第1領域が非常に小さい場合は超伝導状態は安定に存在しない事が予想され得る。

図 3.2

図(3.1,2)より我々は $N_{+1/2}$, $\Psi_{+1/2}$ の時間依存性について以下の様に推察できる。まず、

$$N_{+1/2} = N(t), \quad \Psi_{+1/2} = \Psi_0(t) \quad (3.15)$$

と置く時、適当な初期条件の下で、 $N(t)$ は周期 T の周期関数で

$$N(0)=N(T)=\Lambda_0, \quad (3.16a)$$

$$N(T/2)=\Lambda_1, \quad (\Lambda_0 > \Lambda_1) \quad (3.16b)$$

を満たす。ここで (Λ_0, Λ_1) は図(3.1), (3.2)に示された点の $N_{+1/2}$ 座標の値である。更に $\Psi_0(t)$ について

$$\Psi_0(t) = \begin{cases} \phi_0(t), & (E(L) < E < E(-)) \\ \phi_0(t) + \pi/T \cdot t, & (E(-) < E < E(+)) \\ \phi_0(t) + \pi/2, & (E(+)<E<E(H)) \end{cases} \quad (3.17)$$

となる事が予想される。ここで $\phi_0(t)$ は以下を満たす周期 T の周期関数である:

$$\phi_0(0)=\phi_0(T/2)=0 \quad (3.18)$$

次に $N_{+1/2}$ の具体的な表現を求めよう。保存則(3.10₂)より $N_{+1/2}(t)$, 即ち $N(t)$ を求めればよい。 $N(t)$ は運動方程式(3.7a)によって定められている。 I 軸-保存の式(3.10₂)を使って式(3.7)中の $\sin(2\Psi_{+1/2})$ を消去し、 $N(t)$ に関する閉じた式:

$$\dot{M}^2 = 4G\epsilon \times F(M; N, \epsilon) \quad (3.19a)$$

$$\begin{aligned} F(M; N, \epsilon) &= \frac{1}{4G\epsilon} \cdot [h^{(0)}(M, N-M)^2 - (g^{(0)}(M, N-M) - W)^2] \\ &= -M^3 - [G/4\epsilon \cdot (\Omega^2 - \Omega N - N^2) + \frac{1}{4G\epsilon} \cdot (\epsilon - GN/2)^2 - W/\epsilon] M^2 \\ &\quad + [G/4\epsilon \cdot \Omega N(\Omega - N) + 2/G\epsilon \cdot (\epsilon - GN/2)W] M - W^2/G\epsilon \end{aligned} \quad (3.19b)$$

が得られる。以下の特定の M の値に対して F は次の値をとる。

$$F(M=0; N, \epsilon) = -\bar{\epsilon}_0^2/G\epsilon \quad , \quad (3.20a)$$

$$F(M=N; N, \epsilon) = -\bar{\epsilon}_N^2/G\epsilon \quad , \quad (3.20b)$$

$$F(M=N-\Omega; N, \epsilon) = -\bar{\epsilon}_{N-\Omega}^2/G\epsilon \quad , \quad (3.20c)$$

$$F(M=\Omega; N, \epsilon) = -\bar{\epsilon}_\Omega^2/G\epsilon \quad , \quad (3.20d)$$

ここで, $\bar{\epsilon}_p, p=0, N, \Omega, N-\Omega$ は

$$\bar{\epsilon}_0 = \epsilon + N/2 \cdot [\epsilon + G/2 \cdot (\Omega - N)] = W \quad , \quad (3.21a)$$

$$\bar{\epsilon}_N = \epsilon - N/2 \cdot [\epsilon - G/2 \cdot (\Omega - N)] = W - \epsilon N \quad , \quad (3.21b)$$

$$\bar{\epsilon}_{N-\Omega} = \epsilon + (\Omega - N)/2 \cdot [\epsilon - G/2 \cdot (N - N)] = W - (\epsilon - G/2 \cdot \Omega) \cdot (N - \Omega) \quad , \quad (3.21c)$$

$$\bar{\epsilon}_\Omega = \epsilon - (\Omega - N)/2 \cdot [\epsilon + G/2 \cdot (\Omega - N)] = W - (\epsilon - G/2 \cdot (N - \Omega)) \cdot \Omega \quad (3.21d)$$

また F は3次関数なので次のように分解できる:

$$F(M; N, \epsilon) = -(M-M_0) \cdot (M-M_1) \cdot (M-M_2), \quad M_0 > M_1 > M_2 \quad (3.22)$$

式(3.20)より

$$M_2: \text{real} \quad M_2 < N - \Omega < 0 \quad (3.23)$$

が成り立つ。式(3.14)と(3.19)から意味のある解が存在する為には, F は $(0, N)$ 区間中のある領域で正でなければならない。 $M=0, N$ における F の値が負である事から, この為には

$$0 < M_0 < N, \quad M_0: \text{real} \quad (3.24)$$

が満たされればよい。 M_0 は ϵ, N の関数なので, 式(3.24)は $\bar{\epsilon}$ (あるいは W) に対する以下の制限式となる:

$$\bar{\epsilon}(L) < \bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}(H), \quad (W(L) < W < W(H)) \quad (3.25)$$

また, 前述の Λ_0, Λ_1 は

$$\Lambda_0 = H_0, \quad \Lambda_1 = H_1 \quad (3.26)$$

を満たす。さて、 F は3次関数なので $H(t)$ は楕円積分の手法で求める事ができる。 H が以下の領域:

$$H_1 \leq H \leq H_0 \quad (3.27)$$

を動く事を考え

$$H = H_0 - (H_0 - H_1) \eta(t)^2 \quad (3.28)$$

によって関数 $\eta(t)$ を導入する。 $\eta(t)$ を定める式は以下の様になる:

$$\dot{\eta}(t)^2 = \Sigma^2 (1 - m^2) (1 - k^2 m^2) \quad (3.29a)$$

$$z = K/\pi \cdot \omega \quad (3.29b)$$

ここで ω, K 及び k は以下で定義される:

$$\omega = \sqrt{G_0(M_0 - M_2)} \cdot \pi/K \quad (3.30a)$$

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \equiv K(k) \quad (3.30b)$$

$$k = \sqrt{(M_0 - M_1)/(M_0 - M_2)}, \quad (0 \leq k \leq 1) \quad (3.30c)$$

上で、 K および k は第一種楕円積分とその母数を示す。式(3.29)の解は Jacobi の楕円関数を使って

$$\eta(t) = \text{sn}(zt, k) \quad (3.31)$$

と書ける。式(3.28)より

$$H_{+1/2} = H_0 - (H_0 - H_1) \cdot \text{sn}^2(t, k), \quad (3.32a)$$

$$H_{-1/2} = H - H_{+1/2} \quad (3.32b)$$

が得られる。 $H_{+1/2}$ の初期条件は

$$H_{+1/2}(t=0) = H_0, \quad H_{-1/2} = H - H_0 \quad (3.33)$$

となる。

次に、 $\Phi_{\pm 1/2}$ に対する解析的な解を求める。 $\Phi_{\pm 1/2}$ を定める方程式は式(3.8)に式(3.11)と(3.12)を使って次の様になる:

$$\dot{\Phi}_{+1/2} = f_N(N) + g_{N+1/2}^{(0)}(N_0) - (g^{(0)}(N_0) - W) \cdot h_{N+1/2}^{(0)}(N_0) / h^{(0)}(N_0), \quad (3.34a)$$

$$\dot{\Phi}_{-1/2} = f_N(N) + g_{N+1/2}^{(0)}(N_0) - (g^{(0)}(N_0) - W) \cdot h_{N+1/2}^{(0)}(N_0) / h^{(0)}(N_0) \quad (3.34b)$$

$f(N), g^{(0)}(N_{\pm 1/2}), h^{(0)}(N_{\pm 1/2})$ 及び $N_{\pm 1/2}$ の具体的な形を代入する事により

$$\dot{\Phi}_{+1/2} = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{G}{2} \cdot (\Omega - N) - \frac{\varepsilon_N}{2(\Omega - M_0)} \cdot \frac{1}{1 + A_\Omega^2 \operatorname{sn}^2(\xi t, k)} + \frac{\varepsilon_0}{2M_0} \cdot \frac{1}{1 - A_0^2 \operatorname{sn}^2(\xi t, k)} \quad (3.35a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{-1/2} = & \frac{\varepsilon}{2} - \frac{G}{2} \cdot (\Omega - N) + \frac{\varepsilon_{N-\Omega}}{2(N-\Omega-M_0)} \cdot \frac{1}{1 - A_{N-\Omega}^2 \operatorname{sn}^2(\xi t, k)} \\ & + \frac{\varepsilon_N}{2(N-M_0)} \cdot \frac{1}{1 + A_N^2 \operatorname{sn}^2(\xi t, k)} \end{aligned} \quad (3.35b)$$

が得られる。上で $\varepsilon_p, p=0, N, N-\Omega, \Omega$ は式(3.2)に与えられており, A_p は次で定義される:

$$A_0 = \sqrt{(M_0 - M_1)/M_0}, \quad A_N = \sqrt{(M_0 - M_1)/(N - M_0)} \quad (3.36a)$$

$$A_{N-\Omega} = \sqrt{(M_0 - M_1)/(M_0 - N + \Omega)}, \quad A_\Omega = \sqrt{(M_0 - M_1)/(\Omega - M_0)} \quad (3.36b)$$

$\Phi_{\pm 1/2}$ は上式の右辺を積分すれば得られる。付録(B)に具体的な積分の手順を示すが、この積分は第三種楕円積分に属し結果は以下ようになる:

$$\Phi_{+1/2} = \bar{\Phi}_{+1/2}(0) + \Delta(+1/2) \cdot t + \widehat{\Phi}_{+1/2}(t) \quad (3.37a)$$

$$\Phi_{-1/2} = \bar{\Phi}_{-1/2}(0) + \Delta(-1/2) \cdot t + \widehat{\Phi}_{-1/2}(t) \quad (3.37b)$$

ここで, $\Phi_{\pm 1/2}(0)$ は初期条件によって決まる量である。 $\nu(\pm 1/2)$ は次の様に与えられる:

$$\nu(+1/2) = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{G}{2} \cdot (\Omega - N) - \frac{\varepsilon_N}{2(\Omega - M_2)} + \frac{\omega}{4} \cdot (-\rho_N \theta_N + \rho_0 \theta_0) \quad (3.38a)$$

$$\nu(-1/2) = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{G}{2} \cdot (\Omega - N) + \frac{\varepsilon_N}{2(N - M_2)} + \frac{\omega}{4} \cdot (-\rho_{N-\Omega} \theta_{N-\Omega} + \rho_N \theta_N) \quad (3.38b)$$

上で, θ_p 及び ρ_p は次で与えられる:

$$\theta_p = \varepsilon_p / |\varepsilon_p| \quad (3.39a)$$

$$\rho_p = 2/\pi \cdot (E_p' K + K' E - K' K) \quad (p=0, N, N-\Omega, \Omega) \quad (3.39b)$$

K'_p, E'_p は、それぞれ補母数 $k' = \sqrt{1 - k^2}$ を持つ第一種及び第二種の不完全楕円積分を表す。

$$K'_p = \int_0^{\theta_p} dx / \sqrt{(1-x^2)(1-k'^2 x^2)} \quad (3.40a)$$

$$E'_p = \int_0^{\theta_p} dx \sqrt{(1-k'^2 x^2)/(1-x^2)} \quad (p=0, N, N-\Omega, \Omega) \quad (3.40b)$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{(M_1 - M_2)/(M_0 - M_2)} \quad (3.40c)$$

$$B_0 = \sqrt{-M_2/(M_1 - M_2)}, \quad B_N = \sqrt{(M_0 - M_2)/(N - M_2)} \quad (3.40d)$$

$$B_{N-\Omega} = \sqrt{(N - \Omega - M_2)/(M_1 - M_2)}, \quad B_\Omega = \sqrt{(M_0 - M_2)/(\Omega - M_2)} \quad (3.40e)$$

また, $\widehat{\Phi}_{\pm 1/2}$ は

$$\widehat{\Phi}_{+1/2}(t) = \frac{1}{2} \cdot [-\theta_N L_0(t; \Omega) + \theta_0 L_3(t; 0)] \quad (3.41a)$$

$$\widehat{\Phi}_{-1/2}(t) = \frac{1}{2} \cdot [-\theta_{N-\Omega} L_3(t; N-\Omega) + \theta_N L_0(t; N)] \quad (3.41b)$$

で与えられる。関数 $L_0(t, P)$, $L_3(t, P)$ は周期 T の周期関数で, theta-関数 $\theta_0^{(1)}$, θ_3 を用いて

$$L_0 = \frac{1}{2}i \log \left[\frac{\theta_0(\omega/2\pi \cdot t + iK\tau/2K)}{\theta_0(\omega/2\pi \cdot t - iK\tau/2K)} \right], \quad (P = N, \Omega) \quad (3.42a)$$

$$L_3 = \frac{1}{2}i \log \left[\frac{\theta_3(\omega/2\pi \cdot t + iK\tau/2K)}{\theta_3(\omega/2\pi \cdot t - iK\tau/2K)} \right], \quad (P = N - \Omega, 0) \quad (3.42b)$$

と書ける。

最後に, $x_{\sigma, n}$, $x_{\sigma, n}^*$ に対する解を求める。拘束条件 (3.10c) の下で, $x_{\sigma, n}$, $x_{\sigma, n}^*$ の時間発展は

$$i\dot{x}_{\sigma, n} = H_{\sigma} x_{\sigma, n} \quad , \quad (3.43a)$$

$$i\dot{x}_{\sigma, n}^* = -H_{\sigma} x_{\sigma, n}^* \quad , \quad (3.43b)$$

によって 決まる。上の方程式は次の形の解を持つ:

$$x_{\sigma, n} = y_{\sigma, n} e^{-i\phi_{\sigma}(t)} \quad , \quad (3.44a)$$

$$x_{\sigma, n}^* = y_{\sigma, n}^* e^{i\phi_{\sigma}(t)} \quad , \quad (3.44b)$$

ここで $y_{\sigma, n}$, $y_{\sigma, n}^*$ は Grassmann 数で初期条件よりきまる, また, 拘束条件:

$$\sum_m (-)^{j-m} y_{\sigma, -m} y_{\sigma, m} = 0 \quad , \quad (3.45a)$$

$$\sum_m (-)^{j-m} y_{\sigma, m}^* y_{\sigma, -m}^* = 0 \quad , \quad (3.45b)$$

に従う。関数 ϕ_{σ} は次の方程式の解である:

$$\dot{\phi}_{\sigma}(t) = H_{\sigma}(t) \quad , \quad (3.46)$$

上で式 (3.11), (3.32) を代入する事により H_{σ} は t の関数として陽に表されているとする。もしも, n_{σ} に正準共役な角度変数 ϕ_{σ} :

$$[\phi_{\sigma}, n_{\sigma'}]_D = i \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \quad , \quad (3.47)$$

が存在するとなると上の式 (3.46) は ϕ_{σ} に対する Hamilton の運動方程式になる:

$$\dot{\phi}_{\sigma} = 1/i \cdot [\phi_{\sigma}, H]_D \quad (3.48)$$

今の取扱いでは $n_{\sigma} = \sum_m y_{\sigma, m}^* y_{\sigma, m} = 0$ という場合を考えているので, $y_{\sigma, n}$, $y_{\sigma, n}^*$ は

$$y_{\sigma, n} = y_{\sigma, n}^* = 0 \quad , \quad (3.49)$$

となる。即ち,

$$x_{\sigma, n} = x_{\sigma, n}^* = 0 \quad (3.50)$$

が式(3.43)の解となる。従って、今の場合式(3.46)から得られる ϕ_{σ} の時間依存性は問題とはならない。しかし、 $n_{\sigma} \neq 0$ の場合を扱う時には ϕ_{σ} を隔に計算する必要があるし、更に、次の章で見るように ϕ_{σ} は seniority 数 n_{σ} を変える様な遷移確率に関係する量となる。故に、現在の初期条件の下での ϕ_{σ} の具体的な形を求めておく。式(3.46)は $n_{\sigma} = 0$ の下、次の様になる。

$$\dot{\phi}_{+1/2} = -\frac{E_{\Omega}}{2(\Omega - M_0)} \cdot \frac{1}{1 + A_{\Omega}^2 \sin^2(\Omega t, \Omega)} - \frac{E_0}{2M_0} \cdot \frac{1}{1 - A_0^2 \sin^2(\Omega t, \Omega)} \quad (3.51a)$$

$$\dot{\phi}_{-1/2} = -\frac{E_{N-\Omega}}{2(N-\Omega - M_0)} \cdot \frac{1}{1 - A_{N-\Omega}^2 \sin^2(\Omega t, \Omega)} - \frac{E_N}{2(N - M_0)} \cdot \frac{1}{1 + A_N^2 \sin^2(\Omega t, \Omega)} \quad (3.51b)$$

上式の右辺は $\phi_{\pm 1/2}$ の場合と全く同じに積分できる。結果は

$$\phi_{\sigma} = E_{\sigma}^0 t + \tilde{\phi}_{\sigma}(t) \quad (3.52)$$

$$E_{+1/2}^0 = -E_{\Omega}/2(\Omega - M_2) - \omega/4 \cdot (A_{\Omega} \theta_{\Omega} + P_0 \theta_0) \quad (3.53a)$$

$$E_{-1/2}^0 = -E_N/2(N - M_2) - \omega/4 \cdot (A_{N-\Omega} \theta_{N-\Omega} + A_N \theta_N) \quad (3.53b)$$

$$\tilde{\phi}_{+1/2} = -1/2 \cdot [\theta_{\Omega} L_0(t; \Omega) + \theta_0 L_3(t; \Omega)] \quad (3.53c)$$

$$\tilde{\phi}_{-1/2} = -1/2 \cdot [\theta_{N-\Omega} L_3(t; N-\Omega) + \theta_N L_0(t; N)] \quad (3.53d)$$

となる。初期条件として

$$\phi_{\sigma}(t=0)=0 \quad (3.54)$$

を採った。

以上で2準位対相関模型の古典解が完全に求められた。次に、それぞれの解について詳しく見ていく事にする。 $n_{\pm 1/2}(t)$ は周期関数で、その周期 T は式(3.30)の ω によって定められる：

$$T = 2\pi/\omega \quad (3.55)$$

ω はこの系の基本振動数の一つである。 $\Omega > N$ の場合について図(3.3)に ω を \mathcal{E} の関数として示す。 ω は一般に最小値を持つがその値は 0 ではない、即ち周期 T は有限の値である。更に ω の関数形は滑かで古典軌道の形による phase-space の分割との関係は明かではない。一方、図(3.4)は $\Omega = N$ の場合を示す。この場合、 ω の最小値は $\mathcal{E} \leq \mathcal{E}_0$ の時 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(-)$ の位置にある。値は 0 であり従って周期は無有限大となる。更に ω の傾は $\mathcal{E} = \mathcal{E}(-)$ で不連続であり、 ω の関数形は phase-space の分割に従って2つの部分にわかれる。図(3.5)に ω の全粒子数(N) 依存性をしめす。

次に、 $\tilde{\phi}_{\pm 1/2}$ は式(3.37)に見られるように階段関数 θ_p ($P=0, N, N-\Omega, \Omega$)

図 3.3

図 3.4

図 3.5

を含む。 $\omega(\pm)$ 及び $\tilde{\omega}_{\pm 1/2}$ はこれに由来する不連続性を示し、次にこれを見る。まず θ_{\pm} は、 \mathcal{E}_{\pm} が今、考えているIsp領域では常に負であるので恒等的に-1となり不連続性を示さない。次に \mathcal{E}_{\pm} は($\mathcal{E}(L)$, $\mathcal{E}(H)$)のある点で0になりうるが、その場合 $M_2=N-\Omega$ が成り立ち、さらに次が示される:

$$B_{N-\Omega}|_{\mathcal{E}_{N-\Omega}=0} = \frac{\partial B_{N-\Omega}}{\partial \mathcal{E}}|_{\mathcal{E}_{N-\Omega}=0} = 0 \quad (3.56)$$

上より $\mathcal{E}_{N-\Omega}=0$ となる点では同時に $P_{N-\Omega}$, $\frac{\partial P_{N-\Omega}}{\partial \mathcal{E}}$, $L_3(t; N-\Omega)$ 及び $\frac{\partial L_3(t; N-\Omega)}{\partial \mathcal{E}}$ が0となる事が示される。即ち、 $\mathcal{E}_{N-\Omega}=0$ となる点では $\theta_{N-\Omega}$ は符号を変えるが、同時にそれにかかる係数が0となる為、 $\omega(\pm)$ や $\tilde{\omega}_{\pm}$ はその傾まで含めて連続になる。一方、 \mathcal{E}_0 と \mathcal{E}_N が0となる点はそれぞれ $\mathcal{E}=\mathcal{E}(0)$ および $\mathcal{E}=\mathcal{E}(0)$ であるが、そこでは ρ や \angle は0にはならない。従って $\omega(\pm)$ や $\tilde{\omega}_{\pm}$ 、即ち $\tilde{\omega}_{\pm}$ は $\mathcal{E}=\mathcal{E}(0)$, $\mathcal{E}(0)$ で不連続性を示す。この不連続性は前述の古典軌道の形の違いに直接関係する。即ち、関数 $L_0(t; P)$, $L_3(t; P)$ が周期関数(周期 T)である事から $\Psi_{+1/2}=\tilde{\omega}_{+1/2}-\tilde{\omega}_{-1/2}$ の1周期の間の増分は以下で与えられる。

$$\Delta \Psi_{+1/2} \equiv \Psi_{+1/2}(T) - \Psi_{+1/2}(0) = (\omega(+1/2) - \omega(-1/2)) \cdot T \quad (3.57)$$

一方、具体的な計算により $\mu \equiv \omega(+1/2) - \omega(-1/2)$ は

$$\mu = \begin{cases} 0 & , (\mathcal{E}(L) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(0), \mathcal{E}(+) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(H)) \\ \omega/2 = \pi/T & , (\mathcal{E}(0) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(+)) \end{cases} \quad (3.58)$$

の関係を満たす。 $\mathcal{E}=\mathcal{E}(-)$, $\mathcal{E}=\mathcal{E}(+)$ での μ の $\frac{\omega}{2}$ の飛びはそれぞれ $\omega(+1/2)$, $\omega(-1/2)$ の不連続性からくる。式(3.57), (3.58)より、

$$\Delta \Psi_{+1/2} = \begin{cases} 0 & , (\mathcal{E}(L) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(0), \mathcal{E}(+) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(H)) \\ \pi & , (\mathcal{E}(0) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(+)) \end{cases} \quad (3.59)$$

が成り立ち、故に領域($\mathcal{E}(-)$, $\mathcal{E}(+)$)では軌道は開き、($\mathcal{E}(L)$, $\mathcal{E}(0)$), ($\mathcal{E}(+)$, $\mathcal{E}(H)$)では閉軌道を描く。図(3.6)には $\Omega > N$ の場合に、 $\omega(\pm 1/2)$ のIsp- \mathcal{E} に対する値を描く。図からわかるように第1及び第3領域では両者は一致する。 $\omega(+1/2)$ は $\mathcal{E}=\mathcal{E}(0)$ で不連続でありこの点での phase-space の分割を反映している、一方 $\mathcal{E}=\mathcal{E}(+)$ においては特異性を示さない。 $\omega(-1/2)$ については逆が成り立つ。図(3.7)は $\Omega = N$ の場合であり $\omega(+1/2) = -\omega(-1/2) = \omega/4$ が成り立つ。この場合には3番目の領域($\mathcal{E}(+)$, $\mathcal{E}(H)$)が存在しないので θ_{\pm} に関する特異性は現れない。

同様に、 $\Phi_{+1/2}$ 及び $\Phi_{-1/2}$ については、式(3.53)から分るように、それぞれ $\mathcal{E}=\mathcal{E}(-)$, $\mathcal{E}=\mathcal{E}(+)$ に不連続性を持つ。 $\Phi_{\pm 1/2}$ 中の $\mathcal{E}_{\pm 1/2}^0$ について $\Omega > N$ の場合を図(3.8)に示す。 $\omega(\pm 1/2)$ の場合と同様に、それぞれ $\mathcal{E}=\mathcal{E}(\pm)$ の片方において不連続性を示す。特に $\mathcal{E}=0$ や $G=0$ の時には $\mathcal{E}_{1/2}^0 = \mathcal{E}_{-1/2}^0$ が成り立つ。図(3.9)は $\Omega = N$ の場合を示す、この時は常に $\mathcal{E}_{+1/2}^0 = \mathcal{E}_{-1/2}^0$ が成り立つ。

図 3.6

図 3.7

図 3.8

図 3.9

以上,2準位対相関模型に対応した古典系の運動方程式の解を求め,その性質を簡単に見てきたが,先に定義した量 $\omega, \lambda(\pm 1/2)$ や $E_{\pm 1/2}^0$ は1準位-最小点 $E = \mathcal{E}(L)$ (BCS-状態に対応)において,よく知られた量に一致する。即ち, $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}(L)$ の極限において, ω は準粒子乱雑位相近似(Quasi-particle RPA)の扱いにおける対振動運動の振動数になる。また, $E_{\pm 1/2}^0$ は準位6にある1準粒子の励起1準位に対応する。第1領域が phase-space に存在し超伝導状態が発現する場合は, $\mathcal{E}(L)$ において $\lambda(\pm 1/2)$ は一致するが,これは対回転運動の振動数(chemical potential)に対応する。次章で,更に,一般の励起1準位値に対してもこれらの量が物理的な意味を持つことを示す。

*1 一般に Fermion から成る量子系に対応した古典系を対応則(2.8)の様に作る場合,その phase space の面積は有限になる。これは Pauli 効果に起因し,量子力学的扱いである Boson 展開法において Boson 空間内の一部(physical space)が Fermion 空間と一対一に対応するという事^(32,33)の古典近似における表現である。

§4. 古典系における不連続性の量子系での反映

この章では、前章で求めた古典解から元もとの量子系のどのような情報が得られるかを調べる。特に、古典系には、図(3.1)に典型的に見られる様に、系のエネルギーに対する不連続性が現れる。これは $\varepsilon = \varepsilon(\pm)$ に対応する軌道: ω の軌道が存在する事に起因する。通常、ポトリクス上の運動においては運動の周期 T が無限大になり (ω が 0 になる)、これは量子系ではエネルギー単位間隔が縮退してくる事に反映する。しかしながら、これは単位エネルギー領域においてエネルギー準位が多数ある系では容易に判別できるが、現在扱っている様な、元の系が Fermion からなりエネルギー準位が有限個しかない場合は対応があまり明確ではない(図(4.3))を参照)。更に、図(3.3)が示す様に $\Omega > N$ の場合はポトリクス上においても ω は 0 とはならない。^{*1}このような時には古典系に現れる不連続性は量子系になんらかの反映を見せるのだろうか。§3 で見たようにこの不連続性は $\pm 1/2$ 中の $1/(\pm 1/2)$ の不連続性に起因する。従って、この章では特に §3 で調べた内、 $\Omega > N$ の場合 ($\Omega = 40, N = 30$) について $1/(\pm 1/2)$ の不連続性に焦点をあてて量子系との対応を調べる。^{*2}

量子系との対応を見る為には古典系で得られた種々の量から量子系の情報を引き出す手続き(量子化処方)が必要である。今、扱う古典系は正準座標 (N, φ) で記述される2自由度系であり、かつ、非自明な保存量 $H = N + 1/2 + N - 1/2$ を持つ。従ってこの系は積分可能であり、量子化の処方として前期量子論が使える。まず、以下の様に作用変数を適当な整数に置き換える事により、Hamiltonian の固有状態に対応する古典軌道群を選び出す。

$$I = N + 1/2 + N - 1/2 = N \quad : \text{even integers} \quad , \quad (4.1a)$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint dN + 1/2 d\varphi + 1/2 = \Lambda \quad : \text{integers} \quad (4.1b)$$

上で、式(4.1b)の右辺の面積分は図(4.1)に示された斜線の領域で定義される。図(4.2)にエネルギー ε と作用変数 J の関係を示す。与えられた N の値に対して J はエネルギー ε の単調増加関数となる。今の場合、 N と Λ の取る値は以下の様になる：

$$N = 0, 2, \dots, 2\Omega \quad , \quad (4.2a)$$

$$\Lambda = 0, 1, \dots, \begin{cases} N/2 & (N \leq \Omega) \\ \Omega - N/2 & (N > \Omega) \end{cases} \quad . \quad (4.2b)$$

量子化条件(4.2)を使って離散的なエネルギー固有値が得られる。次に、種々の演算子の行列要素は以下の様に計算される。量子化条件によって選び出された運動において、任意の物理量 \hat{O} は時間について Fourier 級数に展開される。：

$$\hat{O}(t) = \sum_{m_I, m_J} \hat{O}(I, J; m_I, m_J) e^{i(m_I \omega_I + m_J \omega_J)t} \quad , \quad (4.3)$$

ここで、 m_I, m_J は整数を表し ω_I, ω_J はそれぞれ I および J に付随する基本振動数を示す。上の展開の Fourier 係数が、古典量 O に対応する演算子 \hat{O} の行列要素に関連づけられる：

$$\langle N', \Lambda' | \hat{O} | N, \Lambda \rangle = \begin{cases} \hat{O}(N', \Lambda'; N - N, \Lambda' - \Lambda) \\ \text{もし} \\ \hat{O}(N, \Lambda; N' - N, \Lambda' - \Lambda) \end{cases} \quad , \quad (4.4)$$

図(4.1)

図(4.2)

上で $|N, \Lambda\rangle$ は量子系の I 値-固有状態で作用変数の組 ($I=N, J=\Lambda$) によって指定される古典系の運動に対応する。前期量子論の枠組では \hat{O} の行列要素(式(4.4)の左辺)を一意的に Fourier 係数と結び付ける事はできない。例えば可能な2つの Fourier 係数の取り方を式(4.4)の右辺に示した。後に古典軌道から計算した行列要素を正確な値と比べる際にはこの2つの取り方の両方が示される。

図(4.3)において古典系で(量子化則(4.2)により)計算された I 値-固有値を正確な値と比較する。全粒子数 N 及び I 値- E の全域にわたって両方の値はよく一致している。図中で破線は $E(+)$ 及び $E(-)$ に対応する I 値を示す。古典系ではここで軌道の様相が不連続に変わっているのだが、離散的な I 値-スカラーを眺めるだけではこの線上で何が起きているかを知る事は困難である。行列要素の典型例として、演算子 $\hat{p}_{\pm 1/2}$ の対角、及び非対角要素 ($J=\Lambda$ と $\Lambda+1$ の間) を古典系と量子系(正確な計算)で計算する。これらは図(4.4)に作用変数 J の関数として示されている。縦の点線は $E = E(\pm)$ に対応する作用変数の値 $J(\pm)$ を示す。 $N \ll \Omega$ の場合、この行列要素は $J=J(\pm)$ でやはり連続である。対角要素と共に非対角要素についても古典系での記述は量子系の結果をよく再現している。以上の比較から、此の系の場合、古典系での記述は量子系の近似として妥当と考えられる。故に、古典系に現れた不連続性は元の量子系においてもなんらかの実体を持つと思われる以下でこれを調べる。

§3で見た様に、古典軌道の形の不連続な変化は $J(\pm 1/2)$ の $E = E(\pm)$ での不連続性に起因する。従って、最初に $J(\pm 1/2)$ の量子系での対応物を探す。式(3.37)から $\hat{\Phi}_G$ の時間微分は次の様になる:

$$\dot{\hat{\Phi}}_G = J(\phi) + (\text{定数項以外の Fourier 級数}) \quad (4.5)$$

故に、対応則(4.4)から $J(\phi)$ の対応物は次で与えられる:

$$J(\phi)(I=N, J=\Lambda) \longleftrightarrow \langle N, \Lambda | \hat{\Phi}_G | N, \Lambda \rangle \quad (4.6)$$

ここで $\hat{\Phi}_G$ は古典量 Φ_G に対応する演算子である (§2の最後の議論を参照)。演算子 \hat{O} の時間微分は Hamiltonian, \hat{H} との交換子: $i \cdot [\hat{H}, \hat{O}]$ で与えられる。 $\hat{\Phi}_G$ の場合、

$$\hat{\Phi}_G = i [\hat{H}, \hat{\Phi}_G] = \frac{\partial \hat{H}}{\partial N_G} (\hat{N}_{\pm 1/2}, \hat{\Phi}_{\pm 1/2}) \quad (4.7)$$

となる。図(4.5)に $\hat{\Phi}_G$ の対角要素、 $\langle \hat{\Phi}_G \rangle$ と $J(\phi)$ の比較を示す。量子系での値は、予想される通り、古典系での結果よりも滑かに見えるが、それでも尚、古典系に現れる不連続性の十分な痕跡を残している。同じ図に Ω と N をそれぞれ5倍にした場合の結果を示す。図から分るように、不連続性の痕跡はいっそう明確になり、古典極限 ($\Omega, N \rightarrow \infty$) で量子系の結果は古典系の結果に一致する事が予想される。以上から、古典系での運動の様相の不連続な変化は、確かに、古典量 $J(\phi)$ の直接の対応物 $\langle \hat{\Phi}_G \rangle$ に反映する事が分った。

それでは、この $\langle \hat{\Phi}_G \rangle$ は物理的にはどのような意味を持っているのだろうか。これを調べる為に、まず、関数 $G_G(\Delta N)$ を定義する:

$$G_G(\Delta N) = \langle N, \Lambda | e^{-i \Delta N \hat{\Phi}_G} \hat{H} e^{i \Delta N \hat{\Phi}_G} | N, \Lambda \rangle \quad (4.8)$$

図 4.3

図 4.4

図 4.5

この関数を ΔN で微分すると

$$\frac{dG_0(\Delta N)}{d(\Delta N)} = \langle N, \Lambda | e^{-i\Delta N \hat{\mathcal{G}}_0} \hat{\mathcal{G}}_0 e^{i\Delta N \hat{\mathcal{G}}_0} | N, \Lambda \rangle \quad (4.9)$$

が得られる。一方、式(4.8)の \hat{H} の両側に1の分解 $1 = \sum_{N', \Lambda'} |N', \Lambda'\rangle \langle N', \Lambda'|$ を入れると

$$G_0(\Delta N) = \sum_{N', \Lambda'} \mathcal{E}(N', \Lambda') |\langle N', \Lambda' | e^{i\Delta N \hat{\mathcal{G}}_0} | N, \Lambda \rangle|^2 \quad (4.10)$$

が得られる。上で $\mathcal{E}(N', \Lambda')$ は \hat{H} の固有状態 $|N', \Lambda'\rangle$ のエネルギー固有値を現わす。式(4.9)と(4.10)を使って、 $\langle \hat{\mathcal{G}}_0 \rangle$ は次の様に書ける:

$$\begin{aligned} \langle N, \Lambda | \hat{\mathcal{G}}_0 | N, \Lambda \rangle &= \left. \frac{dG_0(\Delta N)}{d(\Delta N)} \right|_{\Delta N=0} \\ &= \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \left[\sum_{N', \Lambda'} (\mathcal{E}(N', \Lambda') - \mathcal{E}(N, \Lambda)) \cdot |\langle N', \Lambda' | e^{i\Delta N \hat{\mathcal{G}}_0} | N, \Lambda \rangle|^2 \right] / \Delta N \quad (4.11) \end{aligned}$$

従って、 ΔN を充分小さいと見なすとき $\Delta N \cdot \langle N, \Lambda | \hat{\mathcal{G}}_0 | N, \Lambda \rangle$ は近似的に $|N, \Lambda\rangle$ から演算子 $e^{i\Delta N \hat{\mathcal{G}}_0}$ によって励起された状態のエネルギーの平均値に等しいと考える事ができる。ここで現れた演算子 $e^{i\Delta N \hat{\mathcal{G}}_0}$ について以下で説明を加える。角度演算子 $\hat{\mathcal{G}}_0$ は1粒子単位 σ の粒子数を現わす \hat{N}_0 に正準共役な演算子であるので、単位 σ の粒子数を ΔN だけ変える任意の演算子 $\hat{O}(\Delta N)$ の $\hat{\mathcal{G}}_0$ -依存性は次の様になる:

$$\hat{O}_0(\Delta N) = \hat{A}(\hat{N} + \frac{1}{2}, \hat{N} - \frac{1}{2}) e^{i\Delta N \hat{\mathcal{G}}_0} \quad (4.12)$$

例えば、具体例として $\hat{C}_{s,m}$ の形は式(2.14)に与えられている。即ち、 $e^{i\Delta N \hat{\mathcal{G}}_0}$ は単位 σ の粒子数を ΔN 変える演算子に共通に現れる因子である。関係式(4.11)から、 $\chi(\sigma)$ に現れる古典系の不連続な変化は、また、 $e^{i\Delta N \hat{\mathcal{G}}_0}$ の遷移強度に反映する事が期待される。図(4.6)に $|\langle \psi | e^{i2\frac{\sigma}{2}\hat{\mathcal{G}}_0} | N, \Lambda \rangle|^2$ と $|\langle \psi | e^{i2\frac{\sigma}{2}\hat{\mathcal{G}}_0} | N, \Lambda \rangle|^2$ を示す、ここで記号 F_u は $|\psi\rangle = |N+2, \Lambda+1\rangle$ の場合を、 F_d は $|\psi\rangle = |N+2, \Lambda\rangle$ の場合をそれぞれ示す。図から、 F_u と F_d の大きさが $\hat{\mathcal{G}}_0$ については $J(-)$ 、 $\hat{\mathcal{G}}_0$ については $J(+)$ 付近で、 $F_d > F_u$ から $F_d < F_u$ へと変化している事が分る。上の議論からこの遷移強度の分布の変化が古典系の不連続性の現れである事がわかる。古典系の結果はこの変化が、古典極限に近づくほど急激に起こる事を示している。今の場合、エネルギー固有値には

$$\mathcal{E}(N, \Lambda) < \mathcal{E}(N+2, \Lambda+1) \quad (4.13a)$$

$$\mathcal{E}(N, \Lambda) > \mathcal{E}(N+2, \Lambda) \quad (4.13b)$$

の関係が成り立っている(図(4.3)を参照)。従って、図(4.6)から、式(4.11)で定義された

図 4. 6

$\hat{c}^{\dagger} \hat{c}$ ($\hat{c}^{\dagger} \hat{c}$) について平均の励起状態は J が $J(-)$ ($J(+)$) を横切る時, その符号を負から正に変える事が予想される。これは図(4.5)に見られる $\langle \hat{\sigma}_0 \rangle$ や $2\chi(\sigma)$ の振舞を説明する。同様の事が $\phi_{\pm 1/2}$ 中の $E_{\pm 1/2}^0$ に現れる不連続性についても言える。演算子 $\hat{c}^{i2\hat{\sigma}_0}$ の遷移強度を図(4.7)に示す。 $\hat{c}^{i2\hat{\sigma}_0}$ の場合と同様に $J=J(\pm)$ 付近で強度分布が変化している事がわかる。

図4.7

- #1 以上の様にいろいろな点で見られる $\Omega=N$ と $\Omega \neq N$ の場合の差違は式(3.2d)からわかる様に $\Omega=N$ の場合に関り Hamiltonian から根号がなくなり物理的に有意義な領域とそうでない領域が滑かに繋がる事に起因する。即ち $\Omega=N$ の場合に関り Hamiltonian は $(N\sigma, \bar{\sigma}_\sigma)$ の全領域で解析的であり通常の Boson 系に対する古典論と同様な結果が得られる。この特異性の原因となる根号は Fermion 系の古典的対応物を正準変数で表わす時一般に見られるもので Fermion 系に対する古典描像の一つの特徴と考えられる。
- #2 $\Omega=N$ の場合については参考文献(42)において古典近似に基づく詳しい分析がなされている。
- #3 式(3.2)からわかる様に \mathcal{H} は次の形:

$$\mathcal{H} = \epsilon \Omega \hat{\mathcal{H}}(\epsilon; u_\sigma, v_\sigma) ,$$

$$\epsilon = \epsilon / G \Omega , \quad u_\sigma = N \sigma / \Omega , \quad v_\sigma = \bar{\sigma}_\sigma ,$$

をしている。従って方程式

$$\dot{u}_\sigma = - \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial v_\sigma} , \quad \dot{v}_\sigma = \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial u_\sigma} ,$$

を満たす関数 (u_σ, v_σ) を使って $(N\sigma, \bar{\sigma}_\sigma)$ は

$$N\sigma(t) = \Omega u_\sigma(\epsilon t) ,$$

$$\bar{\sigma}_\sigma(t) = v_\sigma(\epsilon t) ,$$

と書ける。故に, $\epsilon = \epsilon / G \Omega$ を一定にしたまま Ω を変えた時の古典系の運動はスケールを除いて本質的に同じになる。⁴²⁾

§ 5. 対回転運動と対振動運動

§ 1 で述べた様に、ここで扱っている 2-準位対相関模型は、対相関力によって引き起こされる 1 体場の運動である対回転運動や対振動運動の機構の解析に用いられている。通常、対回転、対振動運動は HFB-の最小点である Hartree-Fock-Bogoliubov 状態 (BCS 状態) のまわりの微小振動を扱う RPA 法の枠内で規定される。³⁰⁾ 本稿の題材である大振幅運動まで考えた時に、このような運動をどう記述するか、更に、 $\bar{E} = \bar{E}(\bar{\alpha})$ の古典系の不連続な変化がこれらの運動にどう影響するかについて本章で調べる。

この為には、まず、最初に与えた正準変数 ($N, \bar{\alpha}$) をそれぞれ対回転及び対振動を表わす変数に変換してやる必要がある。対回転運動は、近似的に導入した基底状態である BCS-状態が全粒子数の固有状態ではない事に起因して、その対称性の破れの回復に伴う運動としてとらえられる。⁵⁾ これは、通常の 3 次元空間での変形した原子核の回転運動に類似のもので、角運動量に対応する量はこの場合系の全粒子数である。故に、対回転運動は全粒子数 N とそれに正準共役な角度変数 $\bar{\alpha}$ によって記述されると期待される。しかしながら、角度変数 $\bar{\alpha}$ は N に正準共役という条件だけでは定まらない。³²⁾ 例えば、 $\bar{\alpha} = \alpha \bar{\alpha}_{+1/2} + \beta \bar{\alpha}_{-1/2}$ は $\alpha + \beta = 1$ という関係が成り立てば常に正準変数条件を満たす。従って、 $(N, \bar{\alpha})$ と独立な、今の場合、対振動運動を表わすと考えられる正準変数 $(M, \bar{\alpha})$ も特定できない。RPA 法においては、小振幅近似の範囲でこの集団変数と内部変数への自由度の分離が、Hamiltonian の 2 次形式を標準系に正準変換する事により、行なわれている。大振幅運動を扱うためには小振幅という制限をはずして同様の事を行わなければならない。最近、山村及び栗山は、古典近似の枠内で集団的自由度については大振幅運動を想定し内部自由度については小振幅の振動を仮定して、この分離を定める方程式系を導いた。⁴²⁾ この方程式は Hamiltonian が相対座標にのみ依存している場合、隔に解く事ができて、集団運動と内部運動はこの時、いわば、一般化された重心運動と相対運動を現わす。³⁵⁾ 付録 (C) に具体的な解法の手続きを示すが、これは今の系にそのまま適用できる (Hamiltonian は相対座標 $\bar{\alpha}_{+1/2} = \bar{\alpha}_{+1/2} - \bar{\alpha}_{-1/2}$ にしかよらない)。結果は、以下の様になる：

$$N + \frac{1}{2} = N_{+1/2}^{(0)}(N) + M, \quad (5.1a)$$

$$N - \frac{1}{2} = N_{-1/2}^{(0)}(N) - M, \quad (5.1b)$$

$$\bar{\alpha}_{+1/2} = \bar{\alpha} + dN_{+1/2}^{(0)}/dN \cdot \bar{\alpha}, \quad (5.2a)$$

$$\bar{\alpha}_{-1/2} = \bar{\alpha} - dN_{-1/2}^{(0)}/dN \cdot \bar{\alpha}. \quad (5.2b)$$

上で $N_{\pm 1/2}^{(0)}(N)$ は BCS 方程式の解を表し、系の HFB-を最小にする：

$$N_{+1/2}^{(0)}(N) + N_{-1/2}^{(0)}(N) = N, \quad (5.3a)$$

$$\mathcal{E}(N, \bar{\alpha} = N_{+1/2}^{(0)}(N), \bar{\alpha}_{+1/2} = \bar{\alpha}_{+1/2} - \bar{\alpha}_{-1/2} = 0) = \mathcal{E}(L). \quad (5.3b)$$

即ち、 $(N + \frac{1}{2} = N_{+1/2}^{(0)}(N), \bar{\alpha}_{+1/2} = 0)$ で指定される点は図 (3.1) の \bigcirc に対応する。式 (5.1.2) の逆変換は

$$N = N_{+1/2} + N_{-1/2} + M = N_{+1/2} - N_{+1/2}^{(0)}(N), \quad (5.4)$$

$$\bar{\alpha} = dN_{+1/2}^{(0)}/dN \cdot \bar{\alpha}_{+1/2} + dN_{-1/2}^{(0)}/dN \cdot \bar{\alpha}_{-1/2}, \quad \bar{\alpha}_{-1/2} = \bar{\alpha}_{+1/2} - \bar{\alpha}_{-1/2} \quad (5.5)$$

で与えられる。式(3.32), (3.37), (5.4)と(5.5)によって新しい変数 $(N, \tilde{\alpha})$ と $(N, \tilde{\beta})$ の時間依存性が得られる。ここでは $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ についてのみ結果を書き下す:

$$\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(0) + \lambda t + \tilde{\alpha}(t) \quad , (5.6a)$$

$$\tilde{\beta}(t) = \tilde{\beta}(0) + \lambda t + \tilde{\beta}(t) \quad , (5.6b)$$

$$\lambda = dN^{(0)}/dN \cdot \omega(+1/2) + dN^{(0)}/dN \cdot \omega(-1/2) \quad , (5.7a)$$

$$\omega = \omega(+1/2) - \omega(-1/2) \quad , (5.7b)$$

$$\tilde{\alpha}(t) = dN^{(0)}/dN \cdot \tilde{\alpha}_{+1/2}(t) + dN^{(0)}/dN \cdot \tilde{\alpha}_{-1/2}(t) \quad , (5.8a)$$

$$\tilde{\beta}(t) = \tilde{\alpha}_{+1/2}(t) - \tilde{\alpha}_{-1/2}(t) \quad , (5.8b)$$

上で定義された量 λ は次の関係式を満たす:

$$\lambda = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N} \Big|_{\hat{J}} \quad , (5.9)$$

ここで \mathcal{E} は系のエネルギー関数 $\mathcal{E}(N, \hat{J})$ は次式の逆関数として得られる:

$$\hat{J} = \hat{J}(\mathcal{E}, N) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T M(t) \dot{\tilde{\alpha}}(t) dt \quad , (5.10)$$

式(4.1b)で定義した作用変数 J と、ここに現れた \hat{J} の関係は以下の様になる:

$$\hat{J} = \begin{cases} J & , \quad (\mathcal{E}(0) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(1)) \\ J - N^{(0)}/2 & , \quad (\mathcal{E}(1) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(2)) \\ J - N/2 & , \quad (\mathcal{E}(2) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(N)) \end{cases} \quad (5.11)$$

図(5.1)には J に対して λ が示されている。式(5.3a)から出る関係 $\frac{dN^{(0)}}{dN} + \frac{dN^{(0)}}{dN} = 1$ を使うと、 λ の定義より、第1及び第3領域 $((0, J(-))$ と $(J(+), N/2))$ では λ は $\omega(+1/2) = \omega(-1/2)$ に等しい。 λ は $\omega(+1/2)$ と $\omega(-1/2)$ を両方含むので、一般に、 $J=J(\pm)$ で不連続となる。§4での考察と同様にして、 λ の量子系での対応物は以下の様に得られる:

$$\begin{aligned} \lambda(x=N, J=\Lambda) &\longleftrightarrow \langle N, \Lambda | \hat{\alpha} | N, \Lambda \rangle \\ &= \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \left[\sum_{N', \Lambda'} (\mathcal{E}(N', \Lambda') - \mathcal{E}(N, \Lambda)) \cdot |\langle N', \Lambda' | e^{i\Delta N \hat{\alpha}} | N, \Lambda \rangle|^2 \right] / \Delta N. \end{aligned} \quad (5.12)$$

さて、 $(N, \tilde{\alpha})$ と $(N, \tilde{\beta})$ は、それぞれ対回転運動と対振動運動を現わす変数として導入された。今、回転運動と振動運動の結合が完全にないとすると、全粒子数 N を持つ Hamiltonian の固有状態は次の様な形に書き表せるだろう:

$$|N, \Lambda\rangle = |intrinsic\rangle \otimes e^{iN\hat{\alpha}} \quad , (5.13)$$

上の様な場合、演算子 $e^{i\Delta N \hat{\alpha}}$ の遷移強度は初期状態 $|N, \Lambda\rangle$ と同じ内部波動関数を持つ状態

図 5.1

$(| \text{intrinsic} \rangle \otimes | \hat{C} \rangle)$ 1つに集中し、これによって一群の固有状態が選びだされる(1つの対回転帯が明確に指定される)。式(5.12)は、この場合、

$$\langle N, \Lambda | \hat{C} | N, \Lambda \rangle$$

$$= \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \left[\frac{\mathcal{E}(N+\Delta N, \Lambda) - \mathcal{E}(N, \Lambda)}{\Delta N} \right]_{\text{同じ対回転帯}} = \left. \frac{d\mathcal{E}}{dN} \right|_{\text{同じ対回転帯}}, \quad (5.14)$$

となる。ここで $|N+\Delta N, \Lambda\rangle$ と $|N, \Lambda\rangle$ は同じ対回転帯に属する状態である。式(5.14)は λ が、BCS-状態で構成される基底対回転帯における通常の chemical potential を上の意味の一般の励起対回転帯に対してまで拡張したものと見なせる事を示している。実際、§3の最後に触れた様に、 λ は $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}(L)$ で通常の chemical potential に一致する。式(5.12)、(5.14)及び§4の遷移強度についての議論から、図(5.1)は、古典極限において、領域(0, J(-))では状態 $|N, \Lambda\rangle$ と $|N+2, \Lambda\rangle$ が同じ対回転帯に属し、領域(J(+), N/2)では $|N, \Lambda\rangle$ と $|N+2, \Lambda+1\rangle$ が同じ対回転帯に属する事を示す。一方、領域(J(-), J(+))では、 $|N, \Lambda\rangle$ から $|N+2, \Lambda\rangle$ への遷移確率と $|N, \Lambda\rangle$ から $|N+2, \Lambda+1\rangle$ への遷移確率が一般には同程度なので、明確な対回転帯を指定できない。変数(N_0, ω_0)の(N, Ξ)と(N, Ξ)への分離は、この領域では状態の分類に有用ではなく、従って集団及び内部変数としての性格を失っていると考えられる。図(5.2)は以上を模式的に示し、同じ対回転帯に属する状態は破線で結ばれている。実際の量子系においては、 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\pm)$ の境界付近では回転運動と振動運動の強い結合が予想され、明確な対回転帯の描像は成り立たないと思われる。

 図 5.2

§6. 結論と今後の展望

この論文では古典描像に基づく大振幅集団運動の解析の例題として 2準位対相関模型の古典解の大域的性質を調べそれがどの様に元の量子系に反映するかを考察した。古典軌道の形に従ってこの系の phase space は三つの領域に分けられる。運動方程式を楕円関数を使って解析的に解く事により古典解がそれぞれの領域の境界で不連続性を持つ事を示した。この不連続性は量子系における状態固有状態間の遷移強度分布の急激な変化に関連づけられ、更に、それぞれ対回転・対振動を表すと期待される集団・内部変数の導入によってこれが励起対回転帯描像の破綻として解釈できる事が示された。

次に注意を幾つか述べておく。§5 では付録(C)にまとめた一般的な手続きに従って集団・内部変数を導入し、この変数の分離(式(5.1,2))を全 phase space で採用している。しかし、付録(C)の手続きでは内部変数については小振幅の振動が想定されており、それはこの系においては (N, \bar{N}) が原点のまわりを回る第1の領域 $(\mathcal{E}(L), \mathcal{E}(-))$ に相当している。従ってこの領域で定められた集団・内部変数への分離は第1領域では適当と期待されるが (N, \bar{N}) が有限の値のまわりを回る第3領域 $(\mathcal{E}(+), \mathcal{E}(H))$ や、特に、 (N, \bar{N}) が振動的に振るまわぬ第2領域 $(\mathcal{E}(-), \mathcal{E}(+))$ においても意味を持つか(変数 (N, \bar{N}, H, \bar{H}) は系を記述する一つの座標としては当然、全領域で有意義であり、ここでは (N, \bar{N}) が集団変数という性格を保つかという事を問題としている)については更に検討が必要であろう。実際、第2領域では §5で示した様に一般に明確な対回転帯を指定できなくなり、この変数の分離が状態の分類に有用ではなくなる。更に、この系では集団運動は粒子数保存という対称性に関連して起こりそれを記述すべき変数についてもある程度予想がなりたつ(今の場合、対回転を記述する変数の一つは N と採るのが自然である)。一般の場合には、集団・内部変数への分離は状態-最小点のまわりの小振幅振動を扱う RPA-法の枠内では比較的明確であり、大振幅運動を扱う場合にもこの取扱いを通じて分離が行なわれる場合が多い。この状態-最小点近傍で行なわれた変数への性格づけが、例えば状態を上げていった時にどこまで延長可能か、また延長不可能な領域があるとすればそこでは集団・内部変数という概念自身が無意味になるのか、それとも何か別の指標で変数の分離が行なわれるべきなのか、等の問題が考えられる。これらは古典描像に基づいて量子系の現象を理解・解釈する上で、今後、解決する必要がある課題であろう。

また、この論文では 2準位対相関模型という非常に単純化された殻模型を扱い最終的に図(5.2)にみる様な描像を得たわけであるが、実際の原子核ではここで無視されている残留相互作用を通じて対振動運動は他の運動様式と結合する⁷⁾。従って、ここでの結果がそのまま現れるとは考えにくく、むしろ大振幅集団運動の微視的記述法の探索における一つの例題と考えるべきであろう。この点から、更に一般の場合についてこの模型の解析から予想される事を述べておく。有限個の Fermion からなる系の束縛状態を考える場合、§3で触れた様に、対応する古典系で物理的に意味のある phase space は有限の面積を持ち、従って状態-最小点と共に状態-最大点が存在する。古典系が(近似的に)積分可能であり、古典軌道が量子状態の近似として意味を持つとすると、この時、系は状態-最小点とそのまわりを回る軌道から成る領域と状態-最大点とそのまわりを回る軌道から成る領域という、少なくとも二つの異なる性格の領域を持ち、従ってその間に少なくとも一つの境界(separatrix)を持つ。一般のもっと多自由度の積分可能系、あるいは積分不可能な系についても不変

トラスが意味を持つ領域に対して、^{*1} phase space がどのような領域に分けられ、更にそれぞれの領域における運動の性格はどのようなものであるかを調べる方法を見出す事は古典描像に基づく量子系の予想という点で興味深いと思われる。例えば、二つの異なる領域の境界上では特定の座標方向について何等かの特異性が現れる (§4に見られる様に今の系は通常の素直な古典力学系と違って ϕ_0 -方向にしか不連続性が現れない事に注意すべきである) だろうし、 Γ -最小点のまわりで、RPA-法、等を使って、作られた調和解(phonon)に非調和性を摂動的に取り込んで系を記述する方法の適用限界は最小点周囲領域の境界である事、等が予想される。

2準位対相関模型は(seniority 数が 0 の場合) 2自由度の系でありここではその自由度を全て考えた。実際の原子核の集団運動の記述には集団運動のみを担う少数の集団変数を元の非常に多数の自由度中から抽出する事が計算可能性からも物理的理解の為にも必要であり多くの試みがなされてきている。^{(9), (10)} その中で古典近似に基づく集団変数導出法の研究が幾つか系統的になされており、その妥当性が確かめられつつあるが、^{(46), (35), (36), (43), (45)} 尚、解決すべき課題(例えば、量子系の集団状態が明瞭に存在する場合にも、集団変数を安定に求めるのがかなり困難である事、⁽⁴⁶⁾ 古典系で得られた集団 Hamiltonian についての量子化法の選択、⁽⁴⁷⁾ 等)は多く残っている。更に、ここでは系が積分可能である場合のみを念頭に置いたが古典軌道が不規則に振るまい不変トラスが存在しなくなった領域では古典描像に基づいて量子系を理解する事は可能であるのかという大きな問題がある。古典力学系に現れる複雑で豊富な現象はそれ自身興味深く、更に対応する量子系の現象を理解する上での新しい観点を与えてくれる可能性を持つが、⁽⁴⁸⁾ 古典近似の適用限界と考え合わせて古典系の繊細な情報のどこまでが量子系の近似として意味を持つかを慎重に検討していかなければならないと思われる。⁽⁴⁹⁾ 上述の古典系を経由して集団変数を抜き出す処方に現れる問題の幾つかは非線形力学系の取扱いにおける困難さに由来すると考えられ、この点からも避けがたい検討課題である。

*1 非可積分系において不変トラスで埋めつくせない領域がかなり顕著である場合においても近似的な不変トラスの導入による古典系の量子化によって量子系の定常状態が再現される事が示唆されている。⁽⁴⁴⁾

謝辞

この論文の主題は山村正俊氏(関西大工)との研究から生まれたものです。氏に感謝します。また栗山博氏(関西大工)には多くの有益な議論をしていただきました。氏に感謝します。更に西氏には、日常の共同研究を通してのいろいろな御指導に対して重ねて感謝至します。玉垣良三氏をはじめ京都大学理学部物理・原子核理論研究室の皆様にはセミナー等の議論から多くの刺激を受けました。ここに感謝致します。中でも集団運動セミナーの皆様 特に松柳研一氏, 倉辻比呂志氏, 清水良文氏には多くの有益な助言をいただいた事を感謝します。

§ 付録(A) Grassmann 変数を含む場合に一般化された Poisson Bracket

この章では通常の c -数に加えて Grassmann 数を力学変数と考えた時の Hamiltonian 系の定式化から必要な結果を摘要する。^{(2), (25)} 最初に, Grassmann 変数についての微分を定義する。 $f(x, x^*)$ を Grassmann 変数 x, x^* の関数とする時, 次の関係式

$$\delta f(x, x^*) = \delta x^* \partial_{x^*} f + \delta x \cdot \partial_x f + o(\delta x, \delta x^*) \quad (A.1)$$

によって, Grassmann 変数についての微分 $\partial_x f, \partial_{x^*} f$ を定義する。系が c -数 X_λ, X_λ^* 及び Grassmann 数 x_k, x_k^* によって記述されているとし, 更に次の最小作用の原理に従うとする:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{i}{2} \cdot \sum_{\lambda} (\dot{X}_{\lambda} X_{\lambda}^* - \dot{X}_{\lambda}^* X_{\lambda}) + \frac{i}{2} \cdot \sum_k (x_k \dot{x}_k^* + x_k^* \dot{x}_k) - H \right\} = 0 \quad (A.2)$$

運動方程式は, 上から以下で与えられる:

$$\begin{aligned} i \dot{X}_{\lambda} &= \partial_{x_{\lambda}^*} H, & i \dot{X}_{\lambda}^* &= -\partial_{x_{\lambda}} H, \\ i \dot{x}_k &= \partial_{x_k^*} H, & i \dot{x}_k^* &= \partial_{x_k} H. \end{aligned} \quad (A.3)$$

上式から, 一般の関数 $f(x, x^*, X, X^*)$ の時間変化について

$$\dot{f} = \sum_{\lambda} \left(\partial_{x_{\lambda}^*} H \cdot \partial_{x_{\lambda}} f - \partial_{x_{\lambda}} H \cdot \partial_{x_{\lambda}^*} f \right) + \sum_k \left(\partial_{x_k} H \cdot \partial_{x_k^*} f + \partial_{x_k^*} H \cdot \partial_{x_k} f \right) \quad (A.4)$$

が得られる。通常の Hamilton 系の場合と同様に, これが Poisson Bracket を使って以下の様にと書かれるとする:

$$i \dot{f} = \{f, H\} \quad (A.5)$$

上を満足し, 更に交換, 反交換子の持つ適当な性質を満たす様な Grassmann 数を含む拡張された Poisson Bracket として以下が考えられる:

$$\begin{aligned} \{E_1, E_2\} &= \sum_{\lambda} \left\{ \partial_{x_{\lambda}} E_1 \cdot \partial_{x_{\lambda}^*} E_2 - \partial_{x_{\lambda}} E_2 \cdot \partial_{x_{\lambda}^*} E_1 \right\} - \sum_k \left\{ \partial_{x_k} E_1 \cdot \partial_{x_k^*} E_2 - \partial_{x_k} E_2 \cdot \partial_{x_k^*} E_1 \right\}, \\ \{0, E\} &= \sum_{\lambda} \left\{ \partial_{x_{\lambda}} 0 \cdot \partial_{x_{\lambda}^*} E - \partial_{x_{\lambda}} E \cdot \partial_{x_{\lambda}^*} 0 \right\} + \sum_k \left\{ \partial_{x_k} 0 \cdot \partial_{x_k^*} E + \partial_{x_k} E \cdot \partial_{x_k^*} 0 \right\}, \\ \{E, 0\} &= \sum_{\lambda} \left\{ \partial_{x_{\lambda}} E \cdot \partial_{x_{\lambda}^*} 0 - \partial_{x_{\lambda}} 0 \cdot \partial_{x_{\lambda}^*} E \right\} - \sum_k \left\{ \partial_{x_k} E \cdot \partial_{x_k^*} 0 + \partial_{x_k} 0 \cdot \partial_{x_k^*} E \right\}, \\ \{0_1, 0_2\} &= \sum_{\lambda} \left\{ \partial_{x_{\lambda}} 0_1 \cdot \partial_{x_{\lambda}^*} 0_2 - \partial_{x_{\lambda}} 0_2 \cdot \partial_{x_{\lambda}^*} 0_1 \right\} + \sum_k \left\{ \partial_{x_k} 0_1 \cdot \partial_{x_k^*} 0_2 + \partial_{x_k} 0_2 \cdot \partial_{x_k^*} 0_1 \right\}. \end{aligned} \quad (A.6)$$

ここで記号 E と 0 はそれぞれ Grassmann 変数の偶数倍, 及び奇数倍の関数である。微

分すると $\partial_{x^*} E$ と $\partial_{x^*} 0$ は Grassmann 数の奇数及び偶数件になる事に注意する必要がある。

§ 付録(B) 楕円積分の手順

本文中の式(3.35)の積分の手順を示す。必要な積分は以下の4つである:

$$\begin{aligned} \int \frac{E_N}{1+A_N^2 \operatorname{sn}^2(Zt, k)} dt, & \quad (B.1a) \quad \int \frac{E_\Omega}{1+A_\Omega^2 \operatorname{sn}^2(Zt, k)} dt, & (B.1b) \\ \int \frac{E_0}{1-A_0^2 \operatorname{sn}^2(Zt, k)} dt, & \quad (B.1c) \quad \int \frac{E_{N-\Omega}}{1-A_{N-\Omega}^2 \operatorname{sn}^2(Zt, k)} dt, & (B.1d) \end{aligned}$$

これらは、次の2種類の積分にまとめられる:

$$\begin{aligned} \int_0^Z \frac{dv}{1+A_P^2 \operatorname{sn}^2(v, k)} \quad ; \quad P=N, \Omega & \quad (B.2a) \\ \int_0^Z \frac{dv}{1-A_P^2 \operatorname{sn}^2(v, k)} \quad , \quad P=0, N-\Omega & \quad (B.2b) \end{aligned}$$

まず、式(B.2a)について考える。これを第三種楕円積分の標準系に持っていく為に次の関係を満たす u を求める:

$$A_P^2 = -k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \quad ; \quad P=N, \Omega \quad (B.3)$$

上を満たす u は純虚数 $u=iK_P, P=N, \Omega$ であり、 K_P は以下で定められる:

$$K_P = \int_0^{B_P} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2 x^2)}} \quad , \quad k'^2 = 1 - k^2 \quad ; \quad P=N, \Omega \quad (B.4)$$

ここで、 B_P は式(3.40)に与えられており、参考文献(41)の式(10.29) (以下、(R.10.29)等と記す)を使った。式(B.3)を使って(B.2a)は

$$\begin{aligned} (B.2a) &= \int_0^Z \frac{dv}{1-k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{sn}^2(v, k)} = \int_0^Z dv + \int_0^Z \frac{k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{sn}^2(v, k)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{sn}^2(v, k)} dv \\ &= Z + i \frac{\operatorname{sn}(K_P, k) \operatorname{cn}(K_P, k)}{\operatorname{dn}(K_P, k)} \int_0^Z \frac{k^2 \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{sn}^2(v, k)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{sn}^2(v, k)} dv = Z + i \frac{\operatorname{sn}(K_P, k) \operatorname{cn}(K_P, k)}{\operatorname{dn}(K_P, k)} \Pi(K_P, Z) \end{aligned} \quad (B.5)$$

と表される。上式の $\Pi(K_P, Z)$ は第三種楕円積分の標準系で以下の様になる:

$$\Pi(K_P, Z) = Z(iK_P) - \frac{1}{2} \log \left[\frac{\vartheta_0\left(\frac{Z+iK_P}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{Z-iK_P}{2K}\right)} \right] \quad (B.6)$$

記号 ϑ_0 は theta-関数、 Z は zeta-関数を表す。 ϑ_0 と $Z(u)$ には次の関係:

$$Z(u) = \frac{d}{du} \log \vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right) \quad (R.13.66)$$

がある。また、zeta-関数は

$$Z(u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2(x, k) dx - \frac{E}{K} u \quad (R.13.67)$$

で定義される。式(B.6)から積分

$$\int_0^z \frac{dv}{1 + A_p^2 \operatorname{sn}^2(v, k)} = \left\{ \frac{P - M_0}{P - M_2} + \sqrt{\frac{(M_0 - M_2)(P - M_0)}{(P - M_1)(P - M_2)}} \left(Z(K', k) + \frac{\pi}{2KK'} K' \right) \right\} z \\ + \sqrt{\frac{(M_0 - M_2)(P - M_0)}{(P - M_1)(P - M_2)}} \cdot \frac{1}{2i} \log \left[\frac{\vartheta_0 \left(\frac{z + iK'}{2K} \right)}{\vartheta_0 \left(\frac{z - iK'}{2K} \right)} \right] \quad ; P = N, \Omega \quad (B.7)$$

を得る。ここで次の関係式を使った:

$$Z(iK', k) = i \left\{ \frac{\operatorname{dn}(K', k) \operatorname{sn}(K', k)}{\operatorname{cn}(K', k)} - Z(K', k) - \frac{\pi}{2KK'} K' \right\}$$

同様に、積分(B.2b)についても、まず、次を満たす u を求める:

$$A_p^2 = k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \quad ; P = 0, N - \Omega \quad (B.8)$$

関係式(R.10.53):

$$\operatorname{sn}(K + iu) = \frac{1}{\operatorname{dn}(u, k')} \quad (R.10.53)$$

より、 u は $u = K + iK'$, $P = 0, N - \Omega$ と書ける。ここで K' は

$$\operatorname{dn}^2(K', k') = \frac{k^2}{A_p^2} \quad ; P = 0, N - \Omega \quad (B.9)$$

を満たす。式(3.30)及び(3.36)から、 $k^2 < A_p^2 < 1$, $P = 0, N - \Omega$ が成り立つ事に注意するとこの様な K' は存在し

$$K' = \int_0^{K_p} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2 x^2)}} \quad ; P = 0, N - \Omega \quad (B.10)$$

で与えられる。式(B.5)と(B.6)から積分(B.2b)は以下の様に書き表せる:

$$\int_0^z \frac{dv}{1 - A_p^2 \operatorname{sn}^2(v, k)} = \sqrt{\frac{(M_0 - M_2)(M_0 - P)}{(P - M_2)(M_1 - P)}} \cdot \left\{ \left(Z(K', k) + \frac{\pi}{2KK'} K' \right) z \right. \\ \left. + \frac{1}{2i} \log \left[\frac{\vartheta_0 \left(\frac{z + iK'}{2K} \right)}{\vartheta_0 \left(\frac{z - iK'}{2K} \right)} \right] \right\} \quad ; P = 0, N - \Omega, \quad (B.11)$$

ここで以下の関係式を使った:

$$Z(K + iK') = i \left\{ k^2 \frac{\operatorname{sn}(K', k) \operatorname{cn}(K', k)}{\operatorname{dn}(K', k)} - Z(K', k) - \frac{\pi}{2KK'} K' \right\}$$

$$\vartheta_0(v \pm 1/2) = \vartheta_3(v)$$

次に、式(B.7), (B.11)に現れる $Z(K', k') + \frac{\pi K'}{2KK'}$ を書きかえる。zeta-関数の定義(R.13.67)及び Legendre の関係式:

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}$$

を使って,

$$Z(K', k') + \frac{\pi K'}{2KK'} = E_P' + \left(\frac{E}{K} - 1\right)K_P' \quad ; \quad P = N, \Omega, 0, N, \Omega \quad (B.12)$$

が得られる。以上の式(B.7), (B.11)と(B.12)を(B.1)に代入すればよい。この時、式(3.39a)の階段関数が出てくるのだが、これを見るため式(B.1a)を具体的に計算してみる。

$$\int_0^z \frac{E_P}{1 + A_P^2 \sin^2(u, E_P)} du = \frac{P - M_0}{P - M_2} E_P z + E_P \int \frac{(M_0 - M_2)(P - M_0)}{(P - M_1)(P - M_2)} \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P}{K} z + L_0(t; P) \right\} \quad , \quad P = N, \Omega, \quad (B.13)$$

上で、因子 $E_P \sqrt{\frac{(M_0 - M_2)(P - M_0)}{(P - M_1)(P - M_2)}}$ から階段関数が出る:

$$E_P \sqrt{\frac{(M_0 - M_2)(P - M_0)}{(P - M_1)(P - M_2)}} = E_P \sqrt{\frac{(M_0 - M_2)(P - M_0)^2}{-F(P; N, E)}} = E_P \sqrt{\frac{(M_0 - M_2)(P - M_0)^2}{E_P^2 / G_E}} = \frac{E_P}{|E_P|} (P - M_0) \sqrt{G_E (M_0 - M_2)} \quad ; \quad P = N, \Omega \quad (B.14)$$

最終的に積分(B.1a)は

$$(B.1a) = \left\{ \frac{P - M_0}{P - M_2} E_P + \frac{\omega_0}{2} \mathcal{P}_P \cdot \Theta_P \right\} t + \Theta_P \cdot L_0(t; P) \quad ; \quad P = N, \Omega \quad (B.15)$$

となる。他についても同様である。また、関数 $L_0(t; P)$, $L_3(t; P)$ はそれぞれ以下の様に Fourier 展開できる:

$$L_0(t; P) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sinh(n\pi K'/K)}{\sinh(n\pi K/K)} \sin(n\omega t) \quad , \quad (B.16a)$$

$$L_3(t; P) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{\sinh(n\pi K'/K)}{\sinh(n\pi K/K)} \cdot \sin(n\omega t) \quad . \quad (B.16b)$$

最後に、 $P_{\frac{1}{2}}^* P_{\frac{1}{2}}$ の Fourier 展開を与えておく。これは図(4.4)に与えた行列要素の古典系での計算に必要である。式(2.9)より $P_{\frac{1}{2}}^* P_{\frac{1}{2}}$ は

$$P_{\frac{1}{2}}^* P_{\frac{1}{2}} = \sqrt{M(t)(N - M(t))(\Omega - M(t))(\Omega - N + M(t))} e^{2i\Phi_{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{G} h^{(0)}(M(t), N - M(t)) \cdot e^{2i\Phi_{\frac{1}{2}}} \quad (B.17)$$

と書ける。 $\cos(2\Phi_{\frac{1}{2}})$, $\sin(2\Phi_{\frac{1}{2}})$ が式(3.7)と(3.11)から

$$\cos(2\Phi_{\frac{1}{2}}) = (g^{(0)} - w) / h^{(0)} \quad , \quad (B.18a)$$

$$\sin(2\Phi_{\frac{1}{2}}) = -\dot{M}(t) / 2h^{(0)} \quad , \quad (B.18b)$$

と表せるから式(B.17)は以下の様になる:

$$P_{1/2}^* P_{1/2} = \dot{M}^2(t) + M(t) \cdot (2\epsilon/G - N) - 2\epsilon/G \cdot W - i\epsilon/G \cdot \dot{M}(t) \quad , \quad (B.19)$$

上式は関数 $sn^2(zt, k)$ とその微分及び $sn^4(zt, k)$ を含んでいる。 $sn^2(zt, k)$ の Fourier 展開は

$$E^2 sn^2(v) = 1 - \frac{E}{K} - \frac{\pi^2}{K^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \cos(m\pi v/K)}{\sinh(m\pi K'/K)} \quad , \quad (R.14.47)$$

となる。上の微分は容易であり、また、 $sn^4(zt, k)$ の Fourier 展開は次の関係式より得られる

$$\frac{d^2}{dv^2}(sn^2(v)) = 6E^2 sn^4(v) - 4(1+E^2)sn^2(v) + 2 \quad , \quad (B.20)$$

以上の手続きから $P_{1/2}^* P_{1/2}$ の Fourier 展開は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} P_{1/2}^* P_{1/2} = & 2\epsilon/G (M_0 - W/\epsilon) + M_0(M_0 - N) - (M_0 - M_2)(M_0 - M_1)/3 \\ & - (M_0 - M_2)/3 \cdot (1 - E/K) \cdot \left\{ 4\epsilon/G - N + 2W/\epsilon - G\Omega(\Omega - N)/2\epsilon \right\} \\ & + \epsilon/G \cdot (M_0 - M_2) \left(\frac{\pi}{K} \right)^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{\sinh(m\pi K'/K)} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\epsilon N}{6G} + \frac{W}{3G} - \frac{\epsilon}{12G} \frac{\Omega - N}{\Omega} + \frac{W}{2\epsilon} \cdot m \right. \\ & \left. + \frac{\omega^2}{12G^2} m^2 \right\} e^{imt} \quad , \quad (B.21) \end{aligned}$$

§ 付録(C) 一般化された重心座標と相対座標への変数の分離

この章では, Hamiltonian が座標については相互の差の形でしか依存しない様な場合について, 最初に与えられた正準変数を集団変数と内部変数に分離する手続きを示す。³⁵⁾ まず, 一般の多自由度古典力学系において, 集団および内部変数を定める方程式系を論文(43)から摘要する。N-自由度の系において, 最初に与える正準変数の組を $(Q_r^0, P_r^0; r=1, N)$ とし, これを正準変換により新しい $(q_l^0, p_l^0; l=1, N)$ へと写す。この時, 両者の間には次の関係がある:

$$\sum_{s=1}^N P_s^0 \frac{\partial Q_s^0}{\partial q_l^0} - \frac{\partial W^0}{\partial q_l^0} = P_l^0 \quad , \quad (C.1a)$$

$$\sum_{s=1}^N P_s^0 \frac{\partial Q_s^0}{\partial P_l^0} - \frac{\partial W^0}{\partial P_l^0} = 0 \quad . \quad (C.1b)$$

上で, W^0 は正準変換の母関数である。変換後の変数が内部自由度 $(q_l, p_l; l=1, N-1)$ と集団運動の自由度 (α, π) に次のように分かれているとする (集団運動は 1つの自由度で表せるとする):

$$q_l^0 = q_l, \quad P_l^0 = p_l \quad , \quad l=1, \dots, N-1 \quad (C.2a)$$

$$q_N^0 = \alpha, \quad P_N^0 = \pi \quad (C.2b)$$

ここで, α, π は大振幅の運動を予想するが, 内部自由度 (q_l, p_l) は小振幅の振動を仮定し時に展開できるとする。変換 Q_r, P_r を展開すると

$$Q_r^0 = Q_r(\alpha, \pi) + Q_r^{(1)}(\alpha, \pi) + Q_r^{(2)}(\alpha, \pi) + \dots \quad , \quad (C.3a)$$

$$P_r^0 = P_r(\alpha, \pi) + P_r^{(1)}(\alpha, \pi) + P_r^{(2)}(\alpha, \pi) + \dots \quad , \quad (C.3b)$$

が得られる。 Q_r, P_r は q_l, p_l について 0-次, $Q_r^{(s)}, P_r^{(s)}$ は s-次を示す。1 次の項を具体的に次の様に書くと:

$$Q_r^{(1)} = \sum_{l=1}^{N-1} (A_{rl} q_l + C_{rl} p_l) \quad , \quad (C.4a)$$

$$P_r^{(1)} = \sum_{l=1}^{N-1} (B_{rl} q_l + D_{rl} p_l) \quad , \quad (C.4b)$$

変換(C.3)が正準変換である為の条件として次が得られる:

$$\sum_r \left(\frac{\partial Q_r}{\partial \alpha} \frac{\partial P_r}{\partial \pi} - \frac{\partial Q_r}{\partial \pi} \frac{\partial P_r}{\partial \alpha} \right) = 1 \quad , \quad (C.5)$$

$$\sum_r (D_{rl} \frac{\partial Q_r}{\partial \alpha} - C_{rl} \frac{\partial P_r}{\partial \alpha}) = 0, \quad \sum_r (-B_{rl} \frac{\partial Q_r}{\partial \alpha} + A_{rl} \frac{\partial P_r}{\partial \alpha}) = 0 \quad , \quad (C.6a)$$

$$\sum_r (D_{rl} \frac{\partial Q_r}{\partial \pi} - C_{rl} \frac{\partial P_r}{\partial \pi}) = 0, \quad \sum_r (-B_{rl} \frac{\partial Q_r}{\partial \pi} + A_{rl} \frac{\partial P_r}{\partial \pi}) = 0 \quad , \quad (C.6b)$$

$$A^T D - B^T C = 1 \quad , \quad D^T A - C^T B = 1 \quad , \quad (C.7a)$$

$$A^T B - B^T A = 0 \quad , \quad D^T C - C^T D = 0 \quad . \quad (C.7b)$$

同様に W を展開すると

$$W^0 = W(\alpha, \pi) + W^{(1)}(\alpha, \pi) + W^{(2)}(\alpha, \pi) + \dots \quad (C.8)$$

式(C.1)より以下が得られる:

$$\sum_r P_r \frac{\partial Q_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \pi, \quad \sum_r P_r \frac{\partial Q_r}{\partial \pi} - \frac{\partial W}{\partial \pi} = 0 \quad (C.9a)$$

$$W^{(1)}(\alpha, \pi) = \sum_r P_r(\alpha, \pi) Q_r^{(1)}(\alpha, \pi) \quad (C.9b)$$

$$W^{(2)}(\alpha, \pi) = \sum_r P_r(\alpha, \pi) Q_r^{(2)}(\alpha, \pi) + \frac{1}{2} \left\{ \sum_r Q_r^{(1)}(\alpha, \pi) P_r^{(1)}(\alpha, \pi) - \sum_r \delta_{\alpha} P_{\alpha} \right\} \quad (C.9c)$$

以上は Hamiltonian と無関係な正準変換の一般的な議論である。次に Hamiltonian の 2-次まで展開は次の様になる:

$$\mathcal{H}(Q^0, P^0) = \mathcal{H} + \hat{\mathcal{H}}^{(1)} + \hat{\mathcal{H}}^{(2)} + \mathcal{H}^{(2)} \quad (C.10a)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^0(Q, P) \quad (C.10b)$$

$$\hat{\mathcal{H}}^{(1)} = \sum_r \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_r} Q_r^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_r} P_r^{(1)} \right), \quad \hat{\mathcal{H}}^{(2)} = \sum_r \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_r} Q_r^{(2)} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_r} P_r^{(2)} \right) \quad (C.10c)$$

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial Q_r \partial Q_s} Q_r^{(1)} Q_s^{(1)} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial P_r \partial P_s} P_r^{(1)} P_s^{(1)} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial Q_r \partial P_s} Q_r^{(1)} P_s^{(1)} \right\} \quad (C.10d)$$

正準変換を定める為に以下の要請を置く:

$$\hat{\mathcal{H}}^{(1)} = 0 \quad (C.11a)$$

$$\hat{\mathcal{H}}^{(2)} = 0 \quad (C.11b)$$

上の条件は q_i, p_i に関して 2-次までの範囲内で集団自由度と内部自由度への分離が一意的に行なわれる事を保証する。即ち, 条件(C.11)を満たす変数が 2組あるとすると両者の間には 2-次までの範囲で次の関係が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\alpha, \pi) \\ g(\alpha, \pi) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \pi} - \frac{\partial f}{\partial \pi} \frac{\partial g}{\partial \alpha} = 1 \quad (C.12)$$

$$\begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad S^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (C.13a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial S}{\partial \pi} = 0 \quad (C.13b)$$

つまり, それぞれの自由度中での変換は許されるが集団自由度と内部自由度とが混ざることではない。条件(C.11b)より集団部分空間を定める方程式:

$$\hat{\Lambda}_{\alpha\pi} P_r = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_r}, \quad \hat{\Lambda}_{\alpha\pi} Q_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_r} \quad (C.14a)$$

$$\hat{\Lambda}_{\alpha\pi} \equiv \lambda_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \pi} - \lambda_{\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \lambda_{\alpha} \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha}, \quad \lambda_{\pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \quad (C.14b)$$

が得られる。内部自由度を決める式として条件(C.11b)から次が得られる:

$$\begin{aligned} (D^T \hat{\Lambda}_{\alpha\pi} A - C^T \hat{\Lambda}_{\alpha\pi} B) &= 0, & (D^T \hat{\Lambda}_{\alpha\pi} A - C^T \hat{\Lambda}_{\alpha\pi} D) &= 0 \\ (-B^T \hat{\Lambda}_{\alpha\pi} A + A^T \hat{\Lambda}_{\alpha\pi} B) &= 0, & (-B^T \hat{\Lambda}_{\alpha\pi} C + A^T \hat{\Lambda}_{\alpha\pi} D) &= 0 \end{aligned} \quad (C.15)$$

式(C.5)~(C.7), (C.14)と(C.15)が集団及び内部自由度を定める方程式系である。これらは部分空間内への座標の入れ方の自由度に対応する変換(C.13)の任意性を持っている事に注意する必要がある。

次に Hamiltonian の形を以下の様に仮定する:

$$\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}^0(Q_r^0; P_r^0) = E(Q_{rs}^0; P_1^0, \dots, P_N^0), \quad r, s = 1, \dots, N, \quad (C.16a)$$

$$Q_{rs}^0 = Q_r^0 - Q_s^0 \quad (C.16b)$$

ただし, E を Q_{rs}^0 で展開する時 1-次の項はないとする。例えば, 相対座標にのみ依存する力の働く質点系や, 対相関する Fermion 系の古典近似などはこの形の Hamiltonian を持つ。まず, 集団変数 (α, π) について次の要請を置く:

$$\lambda_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} = 0 \quad (C.17)$$

さらに W の形を次の様に採る:

$$W = \sum_r Q_r P_r - \alpha \pi \quad (C.18)$$

この時, 集団変数を決める式(C.5), (C.14)は

$$\sum_r Q_r \frac{\partial P_r}{\partial \alpha} = 0 \quad (C.19a)$$

$$\sum_r Q_r \frac{\partial P_r}{\partial \pi} = \alpha \quad (C.19b)$$

$$-\lambda_\pi \frac{\partial P_r}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_r} \quad (C.19c)$$

$$\lambda_\pi \frac{\partial Q_r}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_r} \quad (C.19d)$$

となる。式(C.19a)と(C.19c)より

$$\sum_r Q_r \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_r} = 0 \quad (C.20)$$

が得られる。 \mathcal{H} が Q_r の素直な関数である時, 式(C.20)は \mathcal{H} が Q_r を通じては (α, π) によらない事を示す。 \mathcal{H} は $Q_{rs} = Q_r - Q_s$ の関数だから上を成り立たせる 1つの可能な解として以下がある:

$$Q_r = Q(\alpha, \pi) \quad (r=1, \dots, N) \quad (C.21)$$

ここで $Q(\alpha, \pi)$ は (α, π) の任意の関数である。 E が Q_{rs} の 1次の項を含まない事から次が得られる:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_r} \right)_{Q_r=Q} = 0 \quad (C.22)$$

式(C.19c)と(C.22)より

$$\frac{\partial P_r}{\partial \alpha} = 0 \quad (C.23)$$

が成り立つ。即ち、 P_r は π のみの関数である：

$$P_r = \phi_r(\pi) \quad , \quad (C.24)$$

次に、式(C.19b)に(C.21)と(C.24)を代入して

$$Q = \alpha / \frac{dP}{d\pi} \quad , \quad (C.25a)$$

$$P(\pi) = \sum_r \phi_r(\pi) \quad , \quad (C.25b)$$

を得る。最後に、式(C.19d)の左辺に $Q_r=Q$ を代入して次式を得る：

$$\lambda = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_r} \quad , \quad \lambda = \lambda_\pi / \frac{dP}{d\pi} \quad , \quad r=1, \dots, N \quad , \quad (C.26)$$

上式を P_r について逆にといて P_r を λ を通じて (α, π) の関数で表す事ができる：

$$P_r = F_r(\lambda = \lambda_\pi / \frac{dP}{d\pi}) \quad (C.27)$$

式(C.21), (C.25)と(C.27)から、 Q_r, P_r を (α, π) の関数で表す事ができた。特に、式(C.27)を(C.25b)に代入する事により、 P は π の関数となる。従って、 Q_r, P_r は式(C.21)と(C.25b)で定義された (Q, P) を通じて (α, π) に依存する。 (Q, P) と (α, π) は、式(C.25a), (C.25b)から分る様に、運動量についての点変換の関係にある。前述の様に集団変数を決める方程式系(C.5), (C.14)は、今の \mathcal{H} の選択では、ちょうど運動量の点変換について不変であり、解は関数 $P(\pi)$ の任意性を持つ。これは外から取り除いてやるべき不定性であり、例えば $P(\pi)$ として最も単純に

$$Q = \alpha \quad , \quad (C.28a)$$

$$P = \pi \quad , \quad (C.28b)$$

と置いてやればよい。次に、内部変数を求める。式(C.6,7), (C.15)は今の場合次の様になる：

$$\sum_r D_{r\lambda} = 0 \quad , \quad \sum_r B_{r\lambda} = 0 \quad , \quad (C.29a)$$

$$\sum_r C_{r\lambda} \frac{dP_r}{d\pi} = 0 \quad , \quad \sum_r A_{r\lambda} \frac{dP_r}{d\pi} = 0 \quad , \quad (C.29b)$$

$$A^T D - B^T D = 1 \quad , \quad D^T A - C^T B = 1 \quad , \quad (C.30a)$$

$$A^T B - B^T A = 0 \quad , \quad D^T C - C^T D = 0 \quad , \quad (C.30b)$$

$$D^T \frac{\partial A}{\partial \alpha} - C^T \frac{\partial B}{\partial \alpha} = 0 \quad , \quad A^T \frac{\partial D}{\partial \alpha} - B^T \frac{\partial C}{\partial \alpha} = 0 \quad , \quad (C.31a)$$

$$D^T \frac{\partial C}{\partial \alpha} - C^T \frac{\partial D}{\partial \alpha} = 0 \quad , \quad A^T \frac{\partial B}{\partial \alpha} - B^T \frac{\partial A}{\partial \alpha} = 0 \quad , \quad (C.31b)$$

上式(C.29)と(C.31)から

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial B}{\partial \alpha} = \frac{\partial C}{\partial \alpha} = \frac{\partial D}{\partial \alpha} = 0 \quad , \quad (C.32)$$

を得る。即ち, A, B, C, D は π のみの関数である。次によって

$$A_{r2} = \alpha_{r2} - \sum_s \alpha_{s2} \frac{dP_s}{d\pi} \quad , \quad C_{r2} = \gamma_{r2} - \sum_s \gamma_{s2} \frac{dP_s}{d\pi} \quad , \quad (C.33a)$$

$$B_{r2} = \beta_{r2} \quad , \quad D_{r2} = \delta_{r2} \quad , \quad (C.33b)$$

A, B, C, D を新しく導入した $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ で表すと, 式(C.25b)から導かれる関係 $\sum_r \frac{dP_r}{d\pi} = 1$ を使って, 式(C.29)は自動的に満たされる事が分る。 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ についての条件は, 残っている式(C.29a), (C.30)から以下で与えられる:

$$\sum_r \delta_{r2} = 0 \quad , \quad \sum_r \beta_{r2} = 0 \quad , \quad (C.34a)$$

$$\alpha^T \delta - \beta^T \gamma = 1 \quad , \quad \delta^T \alpha - \gamma^T \beta = 1 \quad , \quad (C.34b)$$

$$\alpha^T \beta - \beta^T \alpha = 0 \quad , \quad \delta^T \gamma - \gamma^T \delta = 0 \quad . \quad (C.34c)$$

次に, f_{rs} を以下の条件を満たす直交行列とする:

$$\sum_{r=1}^N f_{rs} f_{rt} = \delta_{st} \quad , \quad (s, t = 1, \dots, N) \quad , \quad (C.35a)$$

$$f_{rN} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad . \quad (C.35b)$$

f を使って $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を新たに導入した a, b, c, d で次の様に表すと

$$\alpha_{rm} = \sum_{\lambda=1}^{N-1} f_{r\lambda} a_{\lambda m} \quad , \quad \beta_{rm} = \sum_{\lambda=1}^{N-1} f_{r\lambda} b_{\lambda m} \quad , \quad (C.36a)$$

$$\gamma_{rm} = \sum_{\lambda=1}^{N-1} f_{r\lambda} c_{\lambda m} \quad , \quad \delta_{rm} = \sum_{\lambda=1}^{N-1} f_{r\lambda} d_{\lambda m} \quad , \quad (C.36b)$$

条件(C.34a)は自動的に満たされる。最後に残った式(C.34b)は a, b, c, d に関する条件式:

$$a^T d - b^T c = 1 \quad , \quad d^T a - c^T b = 1 \quad ,$$

$$a^T b - b^T a = 0 \quad , \quad d^T c - c^T d = 0 \quad , \quad (C.37)$$

となる。これは次の $2(N-1) \times 2(N-1)$ 行列 s :

$$s = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad , \quad (C.38)$$

が symplectic である事を示す。²⁵⁾ 以上から, 最初に与えられた正準変数 (Q_r^0, P_r^0) が集団変数 (α, π) と内部変数 (q_λ, p_λ) によって次の様に表される:

$$Q_r^0 = \alpha + \sum_\lambda (n(\pi) p)_\lambda b_{\lambda r} \quad , \quad P_r^0 = \phi_r(\pi) + \sum_\lambda \delta_{r\lambda} p_\lambda \quad , \quad (C.39a)$$

$$n_{rs} = 1_{rs} - \frac{d\phi_s}{d\pi} \quad , \quad p_{rm} = \sum_\lambda f_{r\lambda} a_{\lambda m} \quad , \quad \delta_{rm} = \sum_\lambda f_{r\lambda} d_{\lambda m} \quad . \quad (C.39b)$$

上で symplectic 行列 s の任意性は, 内部変数を決める方程式系が内部変数内での symplectic 変換について不変である事からきており, 集団変数の場合(式(C.28))と同様に外から定めてやるべきものである。特に, 今の場合に得られた変換(C.39)は, 内部変数 (q_λ, p_λ)

についての 1 次までの展開の意味ではなく、正確な正準変換になっている事を注意しておく。

参考文献

- (1) D.J. Horen et al., Phys. Letters 95B(1980),27;99B(1981),383.
- (2) M. Baranger and K. Kumar, Nucl. Phys. A122(1968),273.
- (3) S. T. Belyaev and V.G. Zelevinski, Nucl. Phys. 39(1962),582.
T. Marumori, M. Yamamura and A. Tokunaga, Prog. Theor. Phys. 31(1964),1009.
- (4) A. Bohr and B.R. Mottelson, "Nuclear Structure Vol.II"(W.A. Benjamin,1975).
- (5) P. Ring and P. Schuck, "The Nuclear Many Body Problem"(Springer-Verlag, Berlin/New York).
- (6) A. Schuh, J. Kunz and U. Mosel, Prog. Theor. Phys. Suppl.74&75(1983),402.
- (7) T. Marumori, K. Takada, F. Sakata, K. Kaneko and S. Tazaki, Prog. Theor. Phys. Suppl.71(1981).
- (8) M. Sakai, Nucl. Phys. A104(1967),301.
- (9) M. Baranger and M. Veneroni, Ann. of Phys. 114(1978),123.
F. Villars, Nucl. Phys. A285(1977),269.
D.J. Rowe and R. Bassermann, Canadian J. of Phys. 54.(1976),1941.
G. Holzwarth and T. Yukawa, Nucl. Phys. A219(1974),125.
T. Marumori, Prog. Theor. Phys. 57(1977),112.
- (10) Y. Abe and T. Suzuki, Eds., "Microscopic Theories of Nuclear Collective Motions", Proceedings of the 5th Kyoto Summer Institute, Kyoto, July, 1982, Prog. Theor. Phys. Suppl.74&75.
- (11) E.R. Marshalek, Nucl. Phys. A161(1971),401.
- (12) M. Yamamura and A. Kuriyama, Prog. Theor. Phys. 65(1981),550.
- (13) A. Kuriyama and M. Yamamura, Prog. Theor. Phys. 66(1981),2130.
M. Yamamura and A. Kuriyama, Prog. Theor. Phys. 66(1981),2147
- (14) H. Kleinert, Phys. Letters. 69B(1977),9.
A. Kuriyama, Prog. Theor. Phys. 60(1978),319,1399.
S. Levit, J.W. Negele and Z. Paltiel, Phys. Rev. 21C(1980),1603.
H. Reinhardt, Nucl. Phys. A346(1980),1.
J.P. Blaizot and H. Orland, Phys. Letters 92B(1981),195.
- (15) H. Kuratsuji and T. Suzuki, Phys. Letters 92B(1980),19.
- (16) M. Yamamura and A. Kuriyama, Prog. Theor. Phys. 65(1981),550.
A. Kuriyama and M. Yamamura, Prog. Theor. Phys. 71(1984),122.
- (17) P. Kramer and M. Saraceno, "Geometry of Time Dependent Variational Principle in Quantum Mechanics", Lecture Notes in Physics Vol.140 (Springer-Verlag, Berlin/New York).
- (18) P. Bonche, S.E. Koonin and J.W. Negele, Phys. Rev. C13(1976),1226.
- (19) K. Goeke and P-G. Reinhard, Eds., "Time-Dependent Hartree-Fock and Beyond", Proceedings of Int. Conf. Bad. Honnef, Germany, June 1982, Lecture Notes in Physics Vol.171 (Springer-Verlag Berlin/New York).
- (20) K. Goeke, R.Y. Cusson, F. Grummer, P-G. Reinhard and H. Reinhardt,

- Prog. Theor. Phys. Suppl. 74&75(1983),33.
- (21) M. Matsuo, Prog. Theor. Phys. 72(1984),666.
- (22) D.J. Thouless, Nucl. Phys. 22(1961),78.
- (23) D.H. Feng and R. Gilmore, Phys. Rev. C26(1982),1244.
- (24) R.D. Williams and S.E. Koonin, Nucl. Phys. A391(1982),72.
- (25) V.I. Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics" (Springer-Verlag, New York, 1980).
- (26) A. Einstein, Verh. Dt. Phys. Ges. 19(1917),82.
M.L. Brillouin, J. de Phys. 7(1926),353.
M.L. Keller, Ann. of Phys. 4(1958),180.
- (27) W. Eastes and R.A. Marcus, J. Chem. Phys. 61(1974),4301.
D.W. Noid and R.A. Marcus, J. Chem. Phys. 62(1975),2119.
D.W. Noid, M.L. Koszykowski and R.A. Marcus, J. Chem. Phys. 73(1980),391.
E. Caurier, S. Drozd and M. Ploszajczak, Nucl. Phys. A425(1984),233.
- (28) M.C. Gutzwiller, J. Math. Phys. 12(1971),343.
M.C. Gutzwiller, J. Math. Phys. 18(1977),806.
M. Tabor, Physica. 6D(1983),195.
- (29) J. Hogaasen-Feldman, Nucl. Phys. 28(1961),258.
R.A. Broglia and C. Riedel, Nucl. Phys. A107(1968),1.
- (30) D.R. Bes and R.A. Broglia, Proceedings of the International School of Physics, "Enrico Fermi", Course LXIX(1977),p.55.
- (31) S. Iida and M. Yamamura, Prog. Theor. Phys. 70(1983),790.
- (32) M. Yamamura and A. Kuriyama, Prog. Theor. Phys. 67(1982),1122.
- (33) R. Casalbuoni, Nuovo Cim. 33A(1976),115,389.
Y. Ohnuki and T. Kashiwa, Prog. Theor. Phys. 60(1978),548.
- (34) S. Iida and M. Yamamura, Prog. Theor. Phys. 70(1983),783.
- (35) M. Yamamura, A. Kuriyama and S. Iida, Prog. Theor. Phys. 72(1984),513.
- (36) T. Marumori, T. Maskawa, F. Sakata and A. Kuriyama, Prog. Theor. Phys. 64(1980),1294.
A. Kuriyama and M. Yamamura, Prog. Theor. Phys. 70(1983),1675.
- (37) P.A.M. Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University" (New York, 1964)
T. Maskawa and H. Nakajima, Prog. Theor. Phys. 56(1976),1295.
- (38) T. Suzuki and K. Matsuyanagi, Prog. Theor. Phys. 56(1976),1156.
- (39) J. Dobaczewski, Nucl. Phys. A369(1981),213,237; A380(1982),1.
- (40) T. Suzuki, Nucl. Phys. A398(1983),557.
- (41) 戸田 盛和 著 "楕円関数入門"(日本評論社,東京,1976)
- (42) M.C. Cambiaggio, G.G. Dussel and M. Saraceno, Nucl. Phys. A415(1984),70.
- (43) M. Yamamura and A. Kuriyama, Prog. Theor. Phys. 71(1984),752.
- (44) C. Jaffe and W.P. Reinhardt, J. Chem. Phys. 77(1982),5191.
- (45) T. Marumori, A. Hayashi, T. Tomoda, A. Kuriyama and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. 63(1980),1576.

- T. Marumori, F. Sakata, T. Une, Y. Hashimoto and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. 66(1981), 1651.
- F. Sakata, T. Marumori, Y. Hashimoto and T. Une, Prog. Theor. Phys. 70(1983), 424.
- 坂田 文彦, 原子核研究 28(1983), 35.
- M. Yamamura, A. Kuriyama and S. Iida, Prog. Theor. Phys. 71(1984), 109.
- A. Kuriyama, M. Yamamura and S. Iida, Prog. Theor. Phys. 72(1984), 1273.
- 詳しくは 栗山 惇, 1984年度 原子核三者若手 夏の学校講義録
- (46) A. Kuriyama, M. Yamamura and S. Iida, Prog. Theor. Phys. to be published.
- (47) M. Matsuo and K. Matsuyanagi to be published.
- S. Iida, "An \hbar -Expansion of Unitary Transformation"
- (48) O. Bohigas, M.J. Giannoni and C. Schmit, Phys. Rev. Letters 52(1984), 1.
- (49) M.V. Berry, N.L. Balazs, M. Tabor and A. Voros, Ann. of Phys. 122(1979), 26.

図の説明

図(3.1)

$\Omega > N$ の場合 ($\Omega=40, N=30$) の $N\omega_z - \Sigma\omega_z$ 平面への古典軌道の射影。パラメタ-の値は (a) $G=0$ (b) $\epsilon=1.0 \times G\Omega$ (c) $\epsilon=0.1 \times G\Omega$ (d) $\epsilon=0$ 。○ 及び △ はそれぞれ I 軸の最小値 ($\mathcal{E} = \mathcal{E}(L)$) と最大値 ($\mathcal{E} = \mathcal{E}(H)$) を与える点を示す。軌道の形に従って, phase space は 3つの領域に分割される。それぞれの領域の境界は太く示され, I 軸 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(-)$, $\mathcal{E}(+)$ に対する軌道である。△₀ と △₁ は軌道に沿って $N\omega_z$ が取る最大及び最小の値を示す。

図(3.2)

$\Omega=N$ の場合 ($\Omega=N=40$) の古典軌道。図(3.1)の説明を参照せよ。

図(3.3)

$\Omega > N$ の場合 ($\Omega=40, N=30$) に ω を I 軸 \mathcal{E} に対して描いた。パラメタ-の値は (a) $G=0$ (b) $\epsilon=1.0 \times G\Omega$ (c) $\epsilon=0.1 \times G\Omega$ (d) $\epsilon=0$ 。縦の点線は $\mathcal{E}(L)$, $\mathcal{E}(-)$, $\mathcal{E}(+)$, $\mathcal{E}(H)$ の値を示す。

図(3.4)

$\Omega=N$ の場合 ($\Omega=N=40$) に ω を I 軸 \mathcal{E} に対して描いた。図(3.3)の説明を参照せよ。関数 ω は $\mathcal{E} = \mathcal{E}(-)$ に特異性を持ち, この点で二つの部分に別れる。

図(3.5)

ω の全粒子数 N への依存性。 $\Omega=40, N=30, 34, 38$ 及び $40(=\Omega)$ の場合を示す。

図(3.6)

$\Omega > N$ の場合 ($\Omega=40, N=30$) に $\omega(-1/2)$ (実線) 及び $\omega(+1/2)$ (一点鎖線) を I 軸 \mathcal{E} に対して描いた。パラメタ-の値は (a) $G=0$ (b) $\epsilon=1.0 \times G\Omega$ (c) $\epsilon=0.1 \times G\Omega$ (d) $\epsilon=0$ 。縦の点線は $\mathcal{E}(L)$, $\mathcal{E}(-)$, $\mathcal{E}(+)$, $\mathcal{E}(H)$ の値を示す。第1領域 ($\mathcal{E}(L)$, $\mathcal{E}(-)$) と第3領域 ($\mathcal{E}(+)$, $\mathcal{E}(H)$) では両者は一致している。関数 $\omega(\pm 1/2)$ は $\mathcal{E}(+)$ あるいは $\mathcal{E}(-)$ で不連続であり, この点で 2つの部分に分かれる。

図(3.7)

$\Omega=N$ の場合 ($\Omega=N=40$) に $\omega(-1/2)$ (実線) 及び $\omega(+1/2)$ (一点鎖線) を I 軸 \mathcal{E} に対して描いた。図(3.6)の説明を参照せよ。両者には $\omega(+1/2) = -\omega(-1/2) = \omega/4$ の関係が成り立つ。関数 $\omega(\pm 1/2)$ は $\mathcal{E} = \mathcal{E}(-)$ に特異性を持ちこの点で 2つの部分に分かれる。

図(3.8)

$\Omega > N$ の場合 ($\Omega=40, N=30$) に $E_{\omega/2}^0$ (実線) 及び $E_{-\omega/2}^0$ (一点鎖線) を I 軸 \mathcal{E} に対して描いた。パラメタ-の値は (a) $G=0$ (b) $\epsilon=1.0 \times G\Omega$ (c) $\epsilon=0.1 \times G\Omega$ (d) $\epsilon=0$ 。縦の点線は $\mathcal{E}(L)$, $\mathcal{E}(-)$, $\mathcal{E}(+)$, $\mathcal{E}(H)$ の値を示す。 $G=0$ と $\epsilon=0$ の場合 ((a) と (d)) は両者は一致する。関数 $E_{\omega/2}^0$ は $\mathcal{E}(+)$ あるいは $\mathcal{E}(-)$ で不連続であり, この点で 2つの部分に分かれる。

図(3.9)

$\Omega=N$ の場合 ($\Omega=N=40$) に E_0^0 を I 軸に対して描いた。図(3.8)の説明を参照せよ。この場合、 $E_{+1/2}^0$ と $E_{-1/2}^0$ は一致する。関数 E_0^0 は $\mathcal{E}=\mathcal{E}(-)$ に特異性を持ちこの点で 2つの部分に分かれる。

図(4.1)

式(4.1b)の右辺の面積分が斜線の領域で示されている。領域の境界はある I 軸- \mathcal{E} の軌道である。(a)は $\mathcal{E}(L)<\mathcal{E}<\mathcal{E}(-)$, (b)は $\mathcal{E}(-)<\mathcal{E}<\mathcal{E}(+)$, (c)は $\mathcal{E}(+)<\mathcal{E}<\mathcal{E}(H)$ の場合を示す。

図(4.2)

$\Omega=40, N=30, \epsilon=0.1 \times G\Omega$ の場合に I 軸- \mathcal{E} と作用変数 J の関係を示す。 I 軸が $\mathcal{E}(L)$ から $\mathcal{E}(H)$ まで動くにつれて J は 0 から $N/2$ まで単調に増加する。

図(4.3)

$\Omega=40, \epsilon=0.1 \times G\Omega, 0 \leq N \leq \Omega$ の場合に量子化則(4.2)によって得られた I 軸-固有値(\circ)を正確な値(\times)と比較する。点線は $\mathcal{E}(\pm)$ を示す。 I 軸は ϵ を単位として描かれている。

図(4.4)

$\Omega=40, N=30, \epsilon=0.1 \times G\Omega$ の場合に古典近似から得られた $\hat{O}=\hat{p}_{+1/2}^\dagger \cdot \hat{p}_{-1/2}$ の行列要素(実線)を正確な値(\times, Δ)と比較する。(a)は対角要素(\times は $\langle N, \Lambda | \hat{O} | N, \Lambda \rangle$ をしめす), (b)は非対角要素(\times と Δ は式(4.4)の右辺の $\langle N, \Lambda+1 | \hat{O} | N, \Lambda \rangle$ と $\langle N, \Lambda | \hat{O} | N, \Lambda-1 \rangle$ をそれぞれ示す)の場合。縦の点線は $\mathcal{E}=\mathcal{E}(\pm)$ に対応する J の値 $J(\pm)$ を示す。

図(4.5)

$\Omega=40, N=30, \epsilon=0.1 \times G\Omega$ の場合に古典量 $\mathcal{J}(\sigma)$ (実線)と期待値 $\langle N, \Lambda | \hat{\mathcal{J}}_\sigma | N, \Lambda \rangle$ (\times)を比較する。(a)は $\sigma=+1/2$, (b)は $\sigma=-1/2$ の場合。領域 $(0, J(-)), (J(+), N/2)$ では両者は一致する。参考の為に $\Omega'=5 \times \Omega, N'=5 \times N, \Lambda'=5 \times \Lambda$ の場合を Δ で示す。単位は ϵ である。

図(4.6)

$\Omega=40, N=30, \epsilon=0.1 \times G\Omega$ の場合に遷移確率 $|\langle f | e^{2i\hat{\phi}_\sigma} | N, \Lambda \rangle|^2$ が示される。(a)は $\sigma=+1/2$, (b)は $\sigma=-1/2$ の場合。 \times と Δ は $F_d(|f\rangle=|N+2, \Lambda\rangle)$ と $F_u(|f\rangle=|N+2, \Lambda+1\rangle)$ を示す。 F_d と F_u の大小関係は $\sigma=+1/2$ の場合 $J=J(-)$, $\sigma=-1/2$ の場合 $J=J(+)$ の付近で逆転する。

図(4.7)

$\Omega=40, N=30, \epsilon=0.1 \times G\Omega$ の場合に遷移確率 $|\langle f | e^{2i\hat{\phi}_\sigma} | N, \Lambda \rangle|^2$ が示される。(a)は $\sigma=+1/2$ の場合で \times と Δ は $|f\rangle=|N+2, \Lambda, n_{+1/2}=2\rangle, |f\rangle=|N+2, \Lambda-1, n_{+1/2}=2\rangle$ を示す。(b)は $\sigma=-1/2$ の場合で \times と Δ は $|f\rangle=|N+2, \Lambda, n_{-1/2}=2\rangle, |f\rangle=|N+2, \Lambda-1, n_{-1/2}=2\rangle$ を示す。

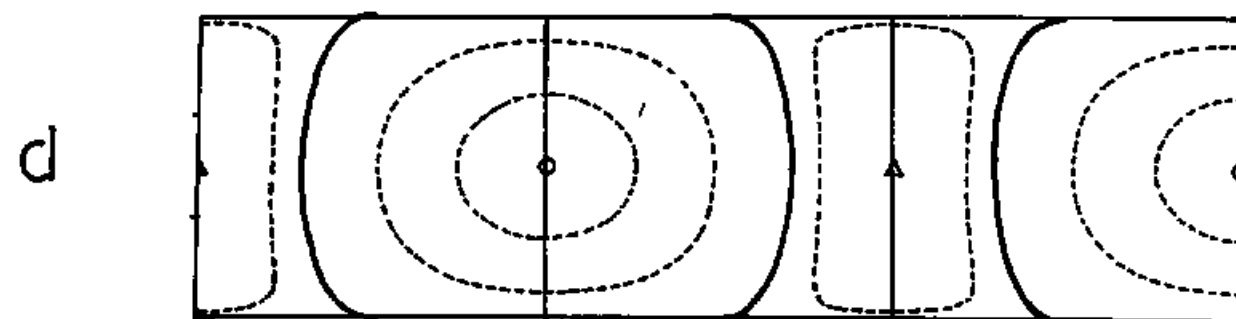
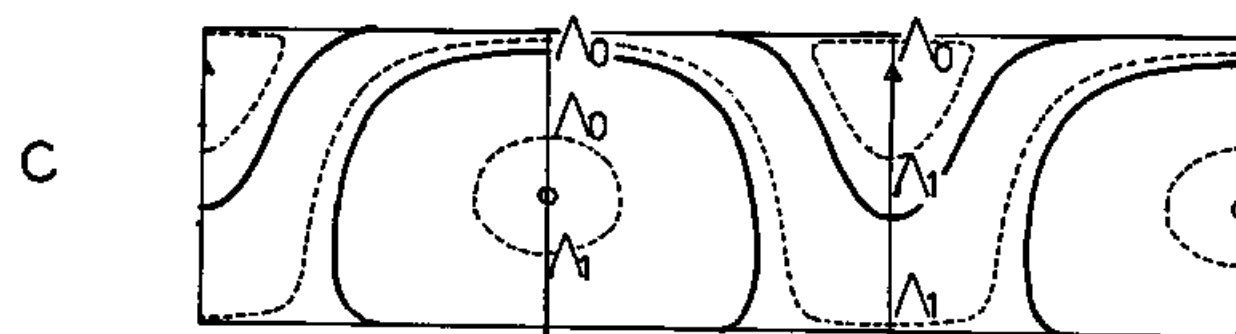
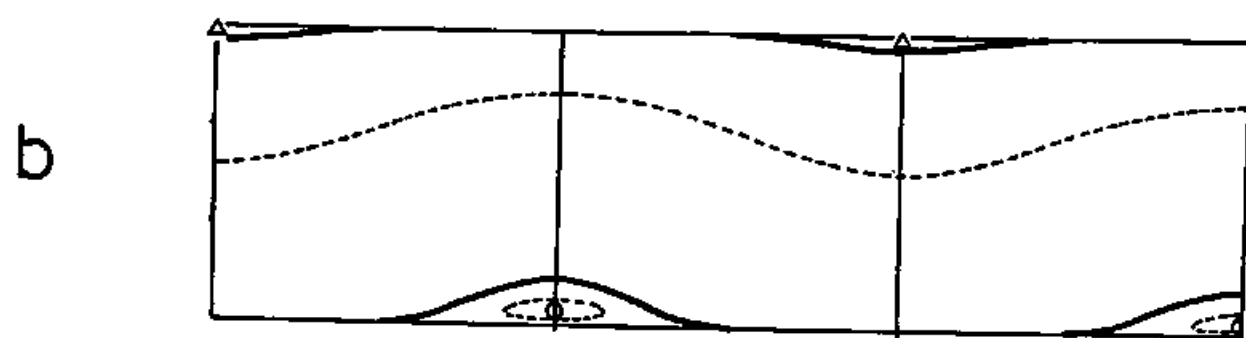
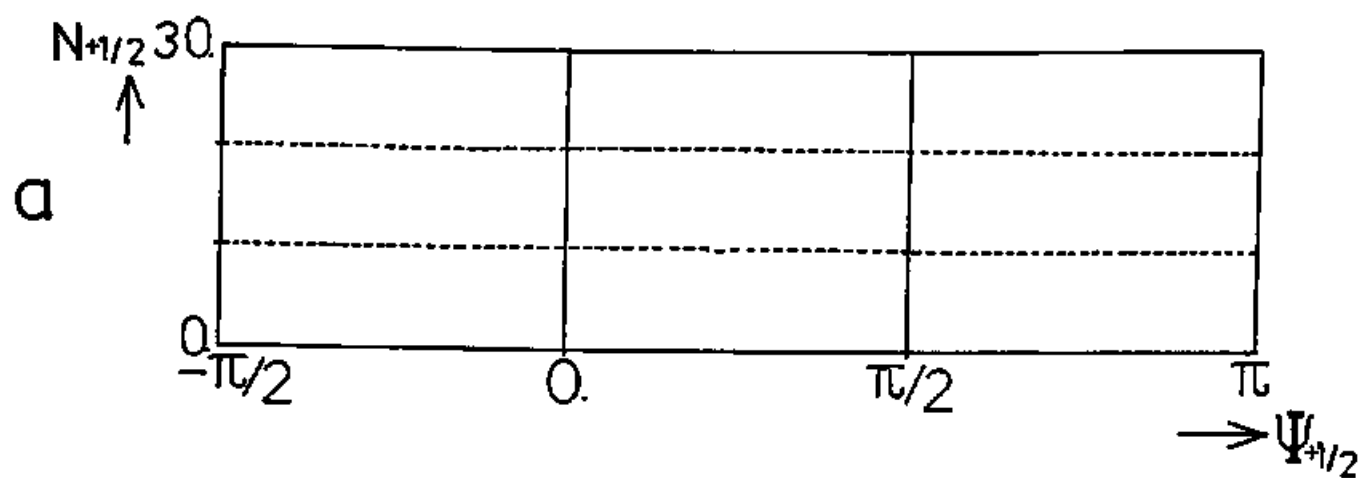
図(5.1)

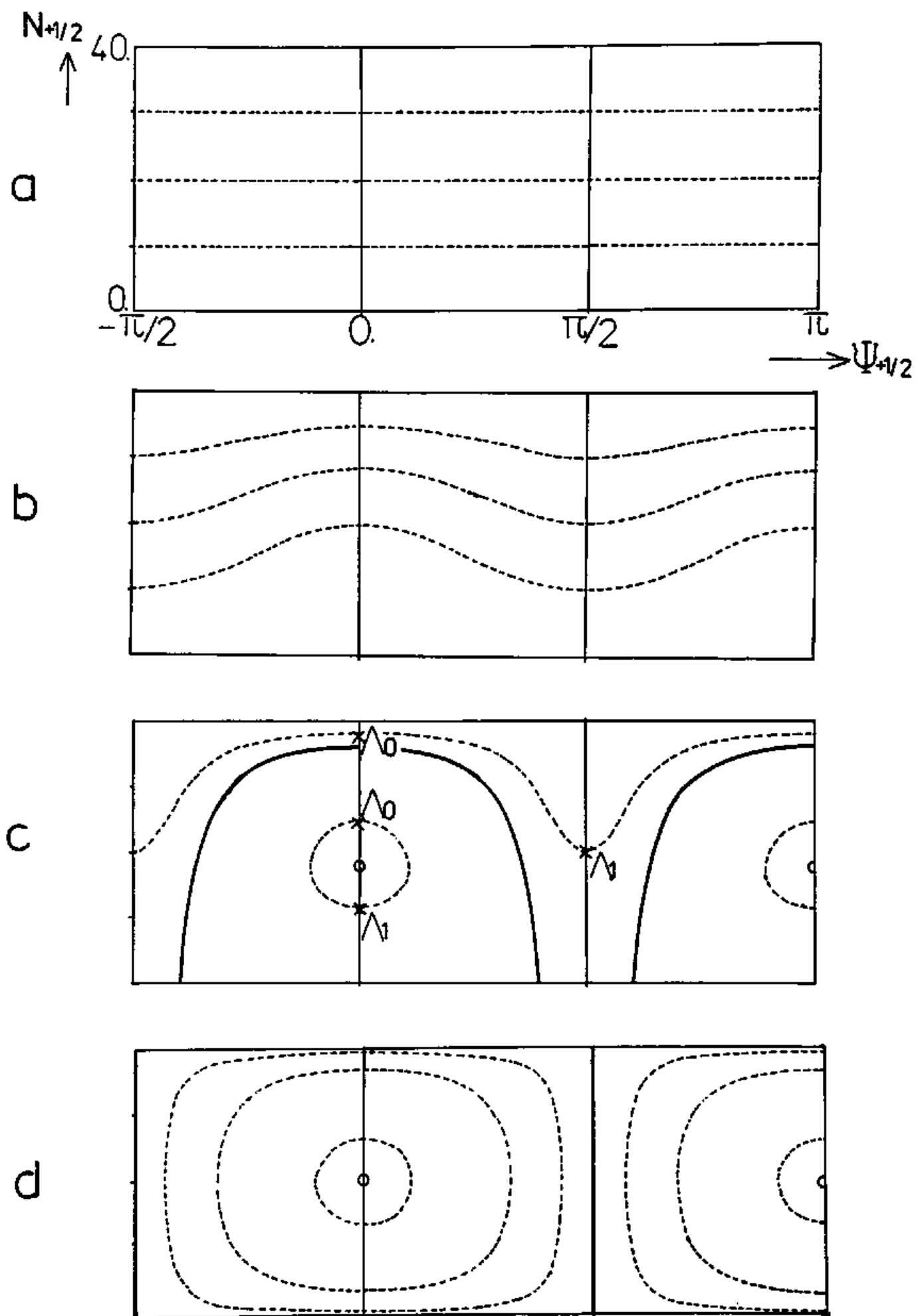
$\Omega=40, N=30, \epsilon=0.1 \times G\Omega$ の場合に λ が J の関数として示される。比較の為に、 $\mathcal{J}(+1/2)$ (破線), $\mathcal{J}(-1/2)$ (一点鎖線)を示す。領域 $(0, J(-)), (J(+), N/2)$ では $\lambda \approx \mathcal{J}(\pm 1/2)$ と一

致する。単位は ϵ 。

図(5.2)

励起対回転帯の構造を模式的に示す。同一の対回転帯に属する状態は破線で結ばれている。点線は $\xi = \xi(\pm)$ を示す。





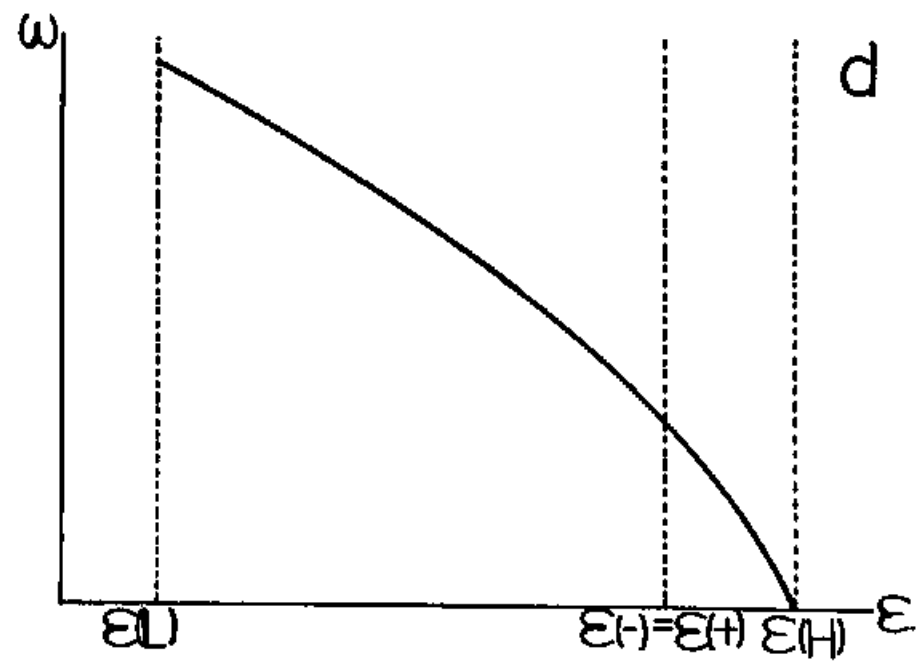
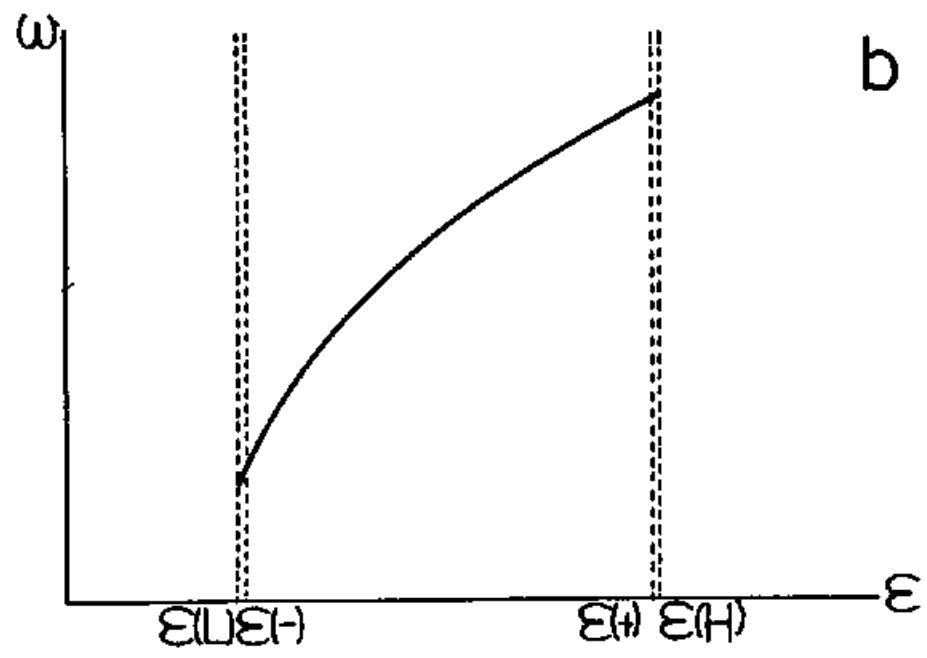
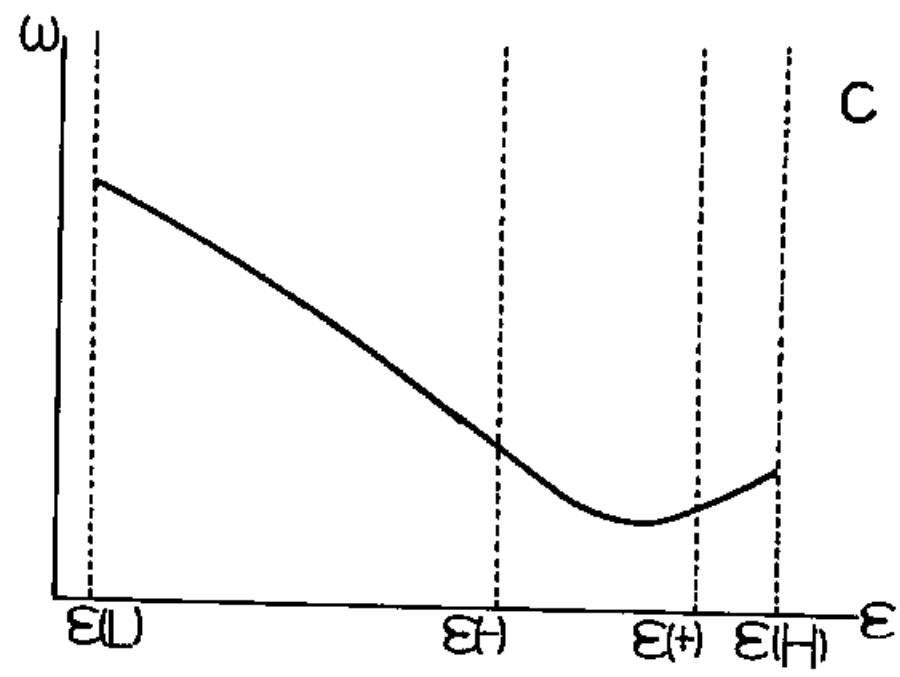
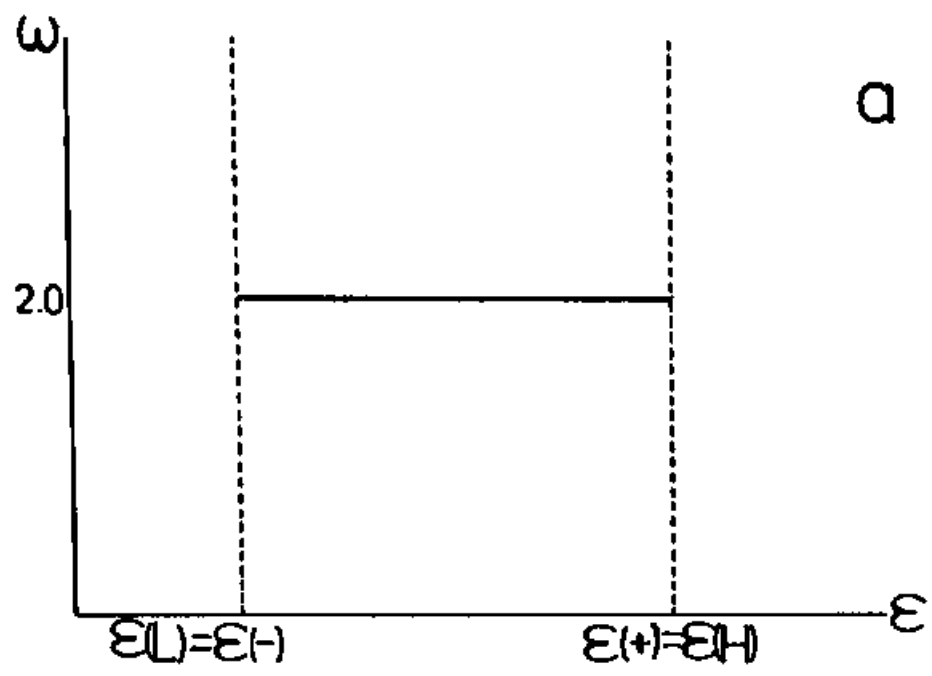


图 3.3

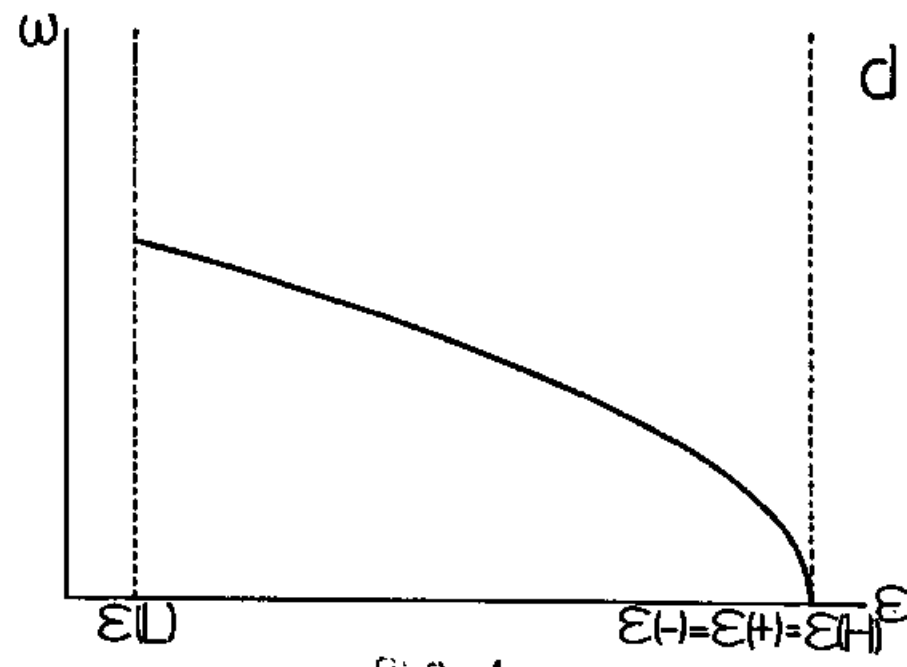
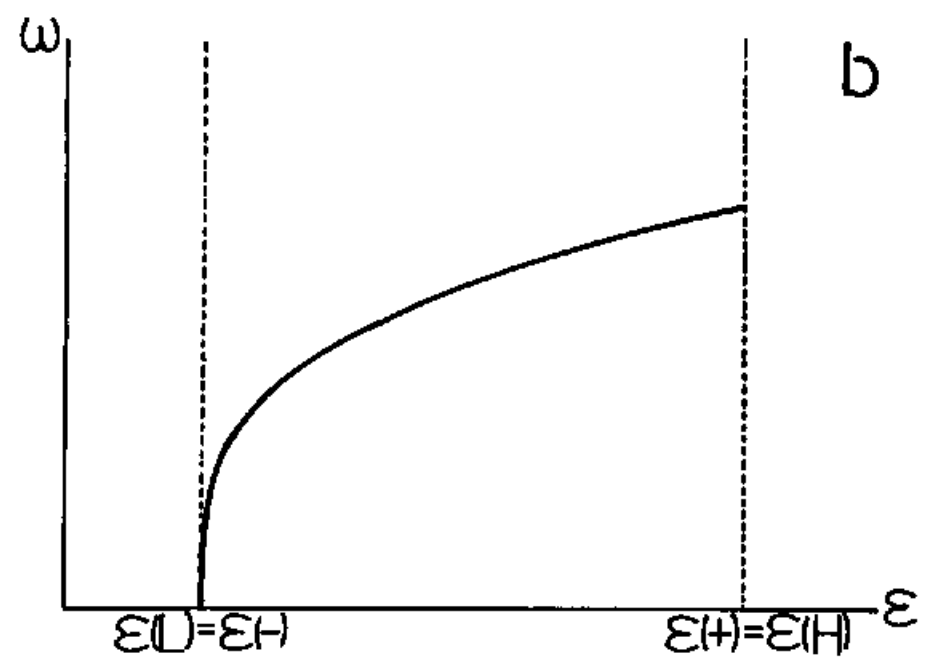
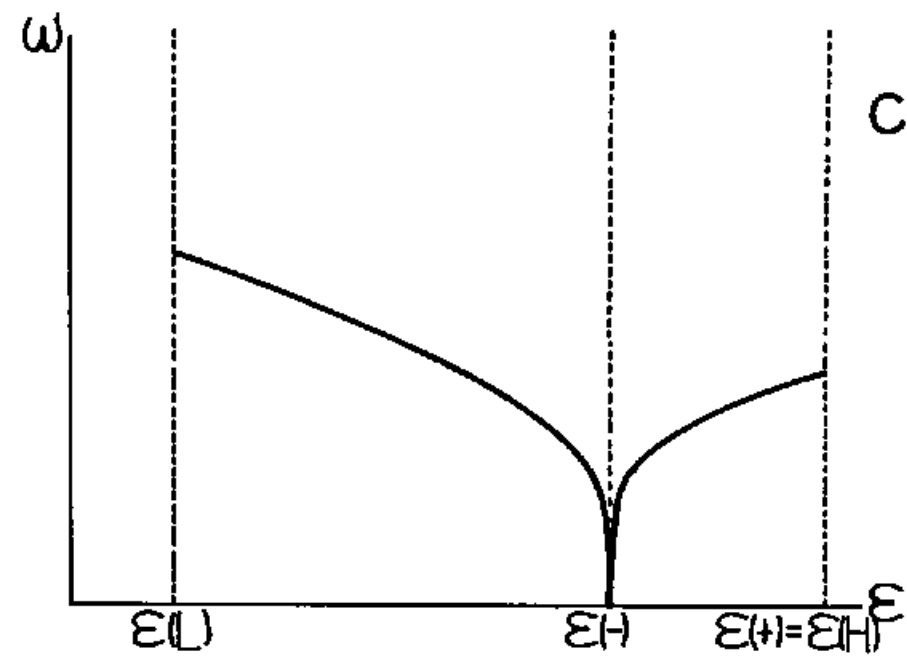
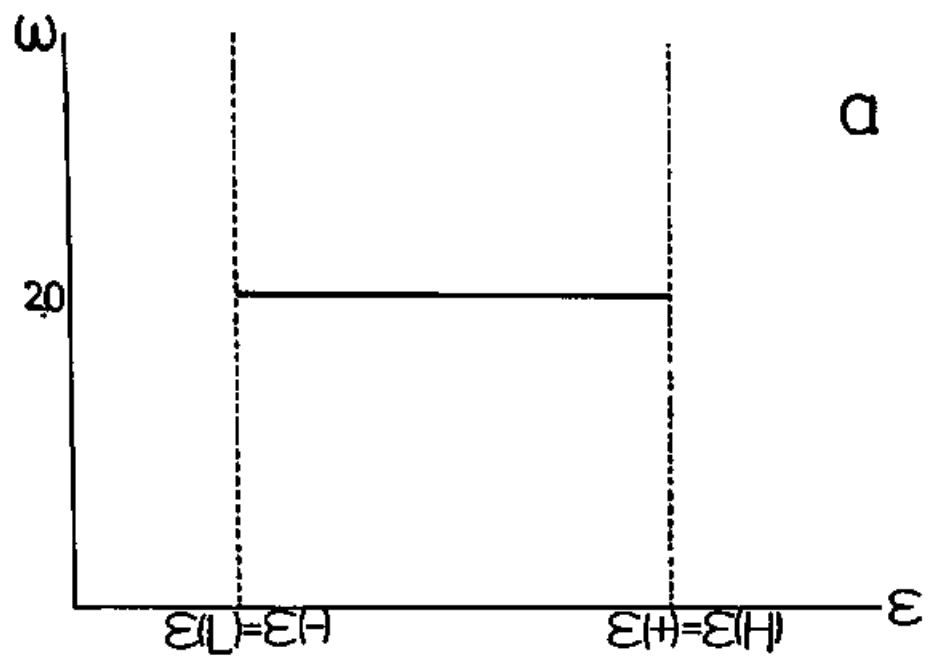
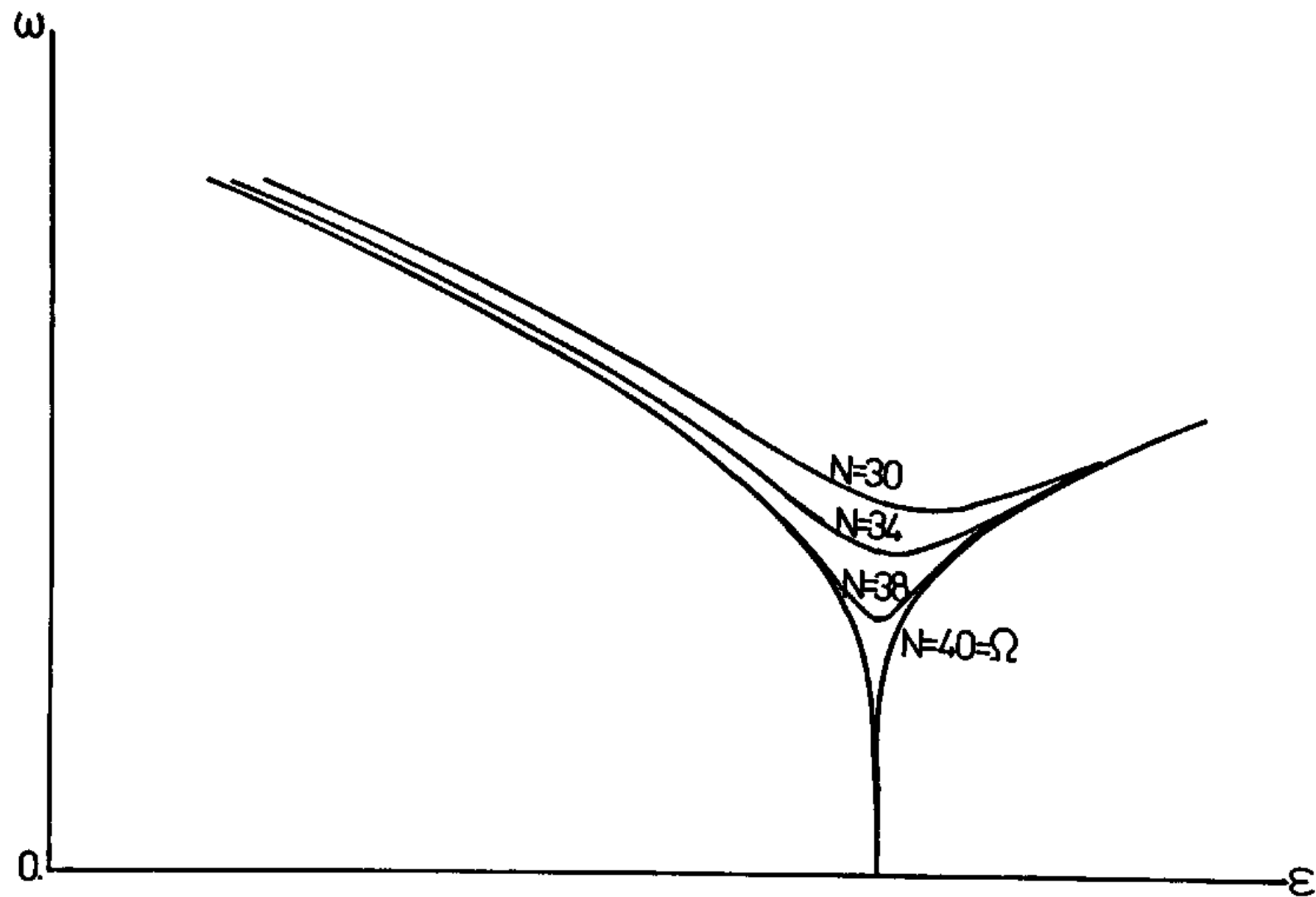


图 3.5



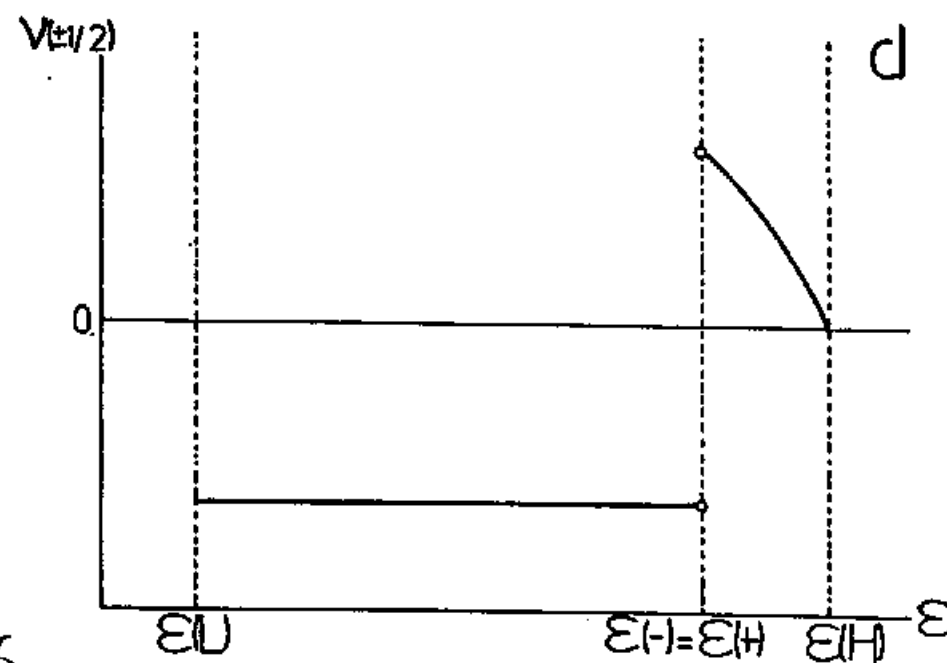
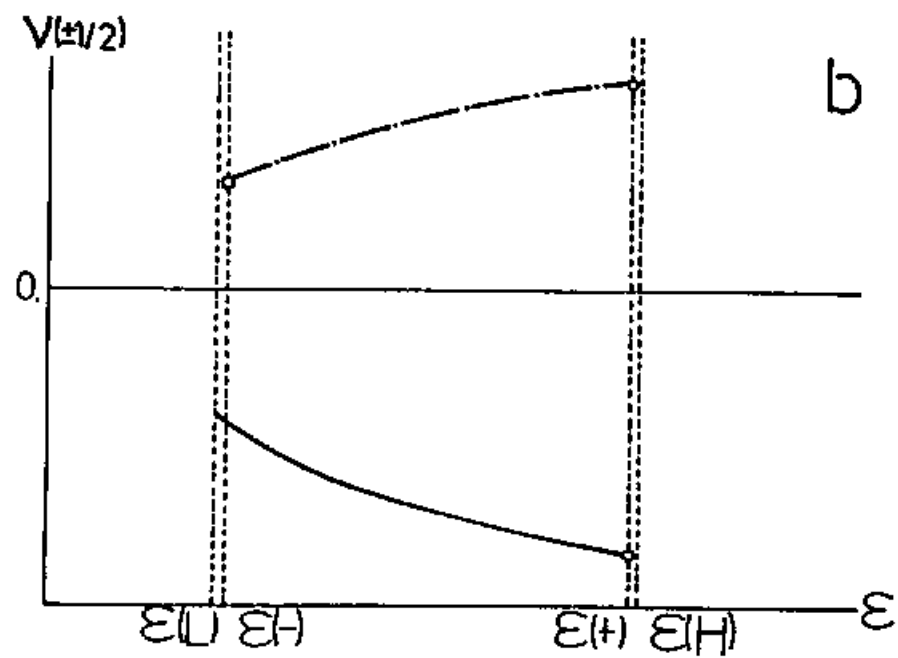
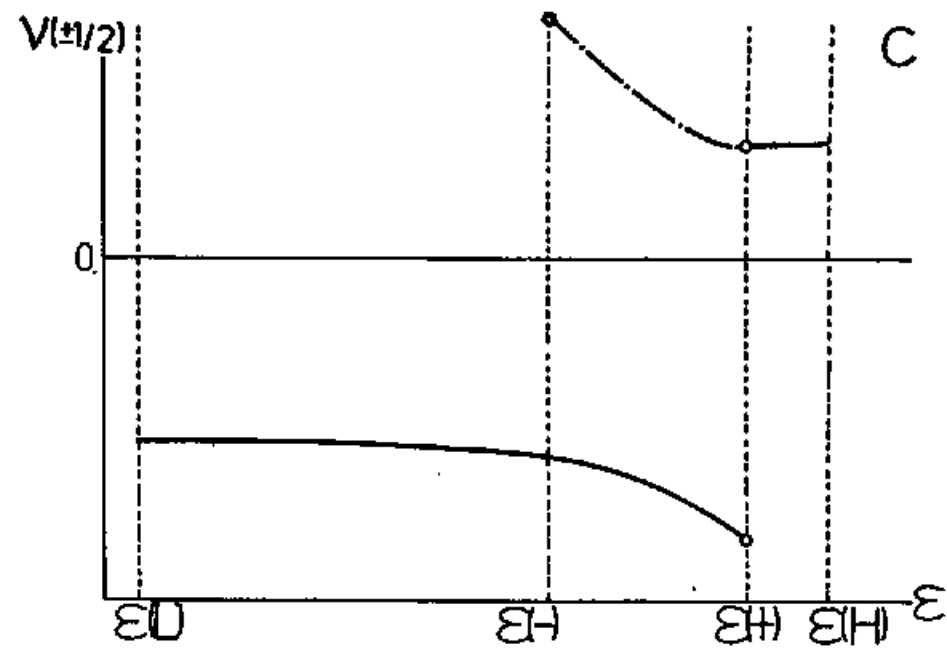
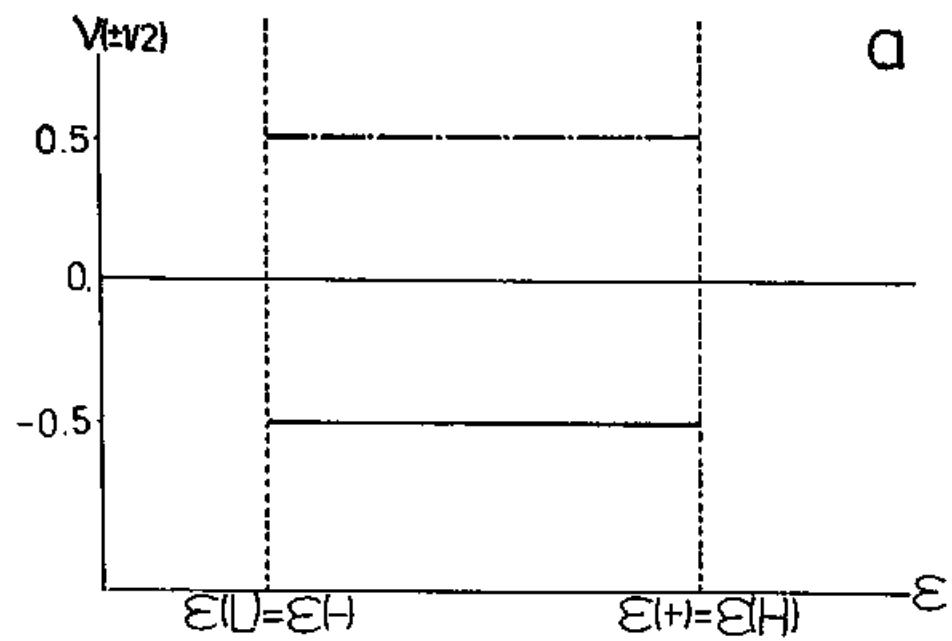


图 3.6

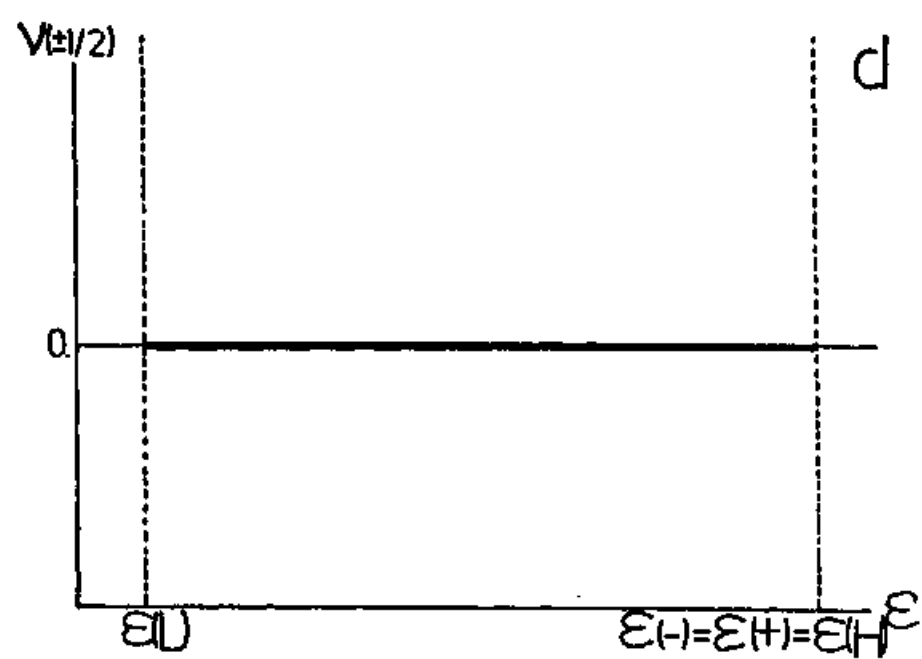
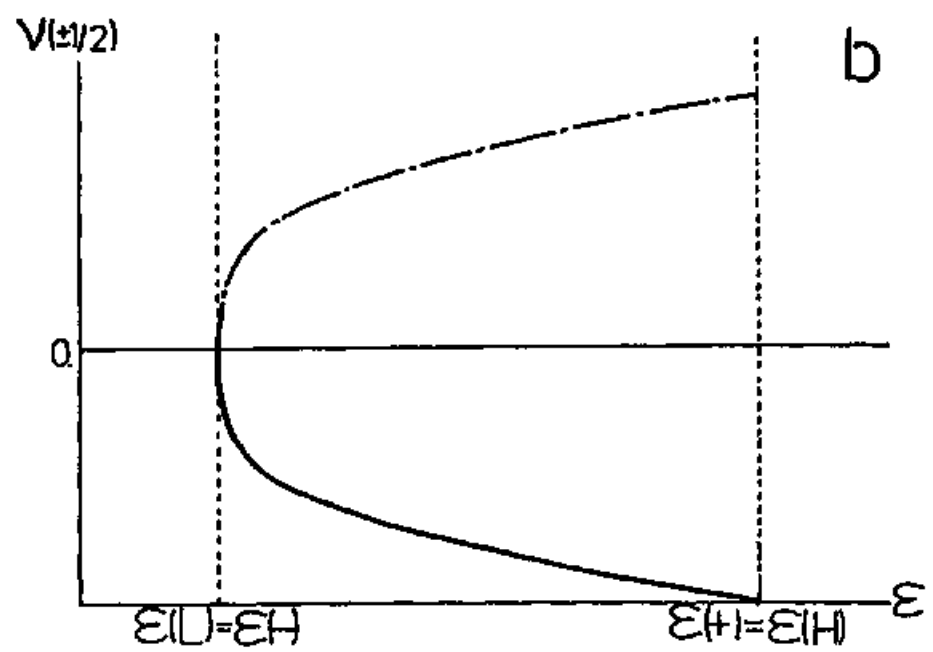
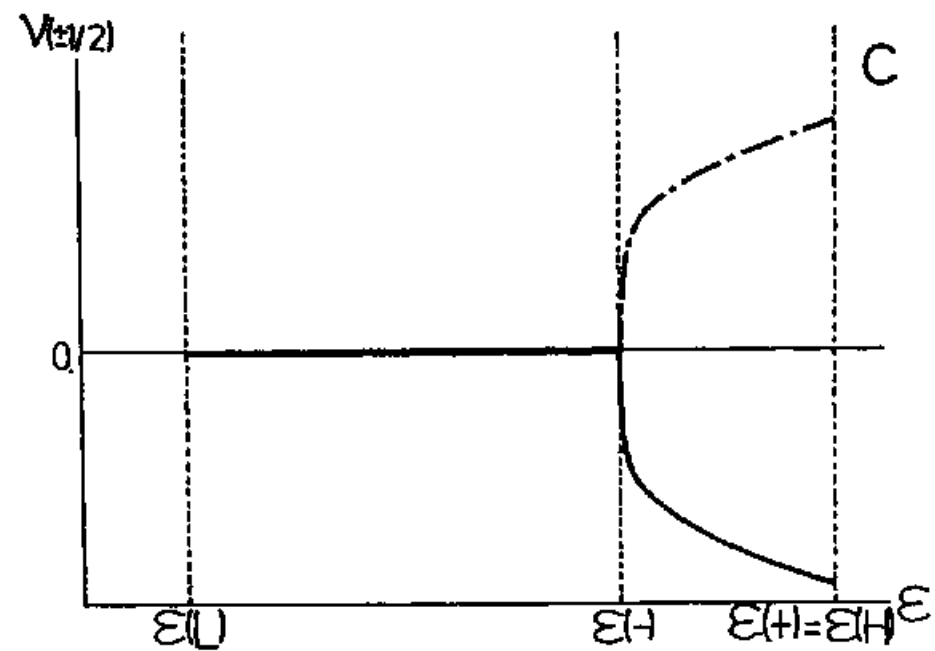
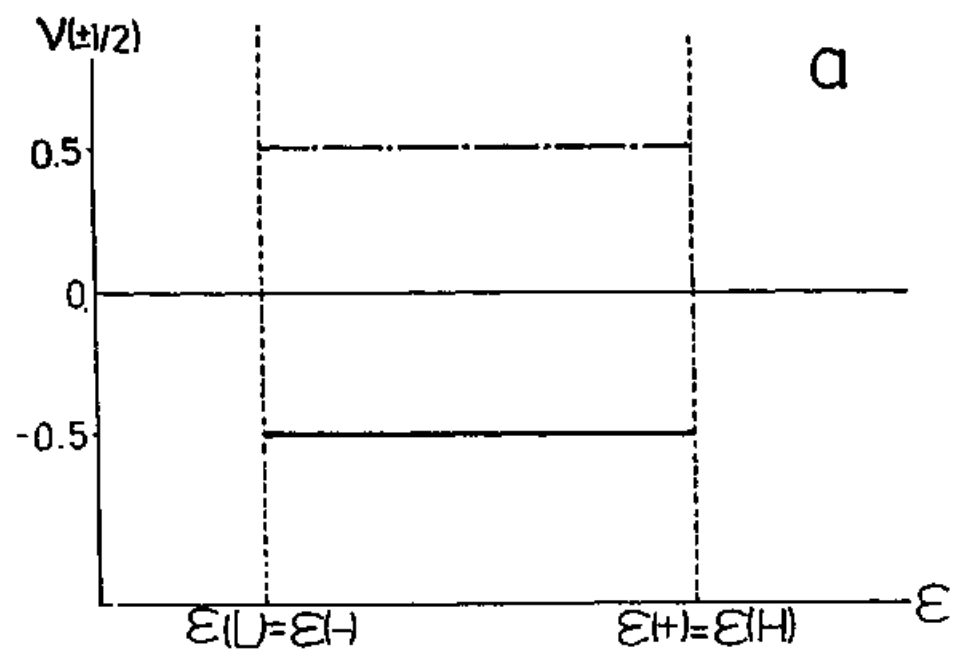


图 3.7

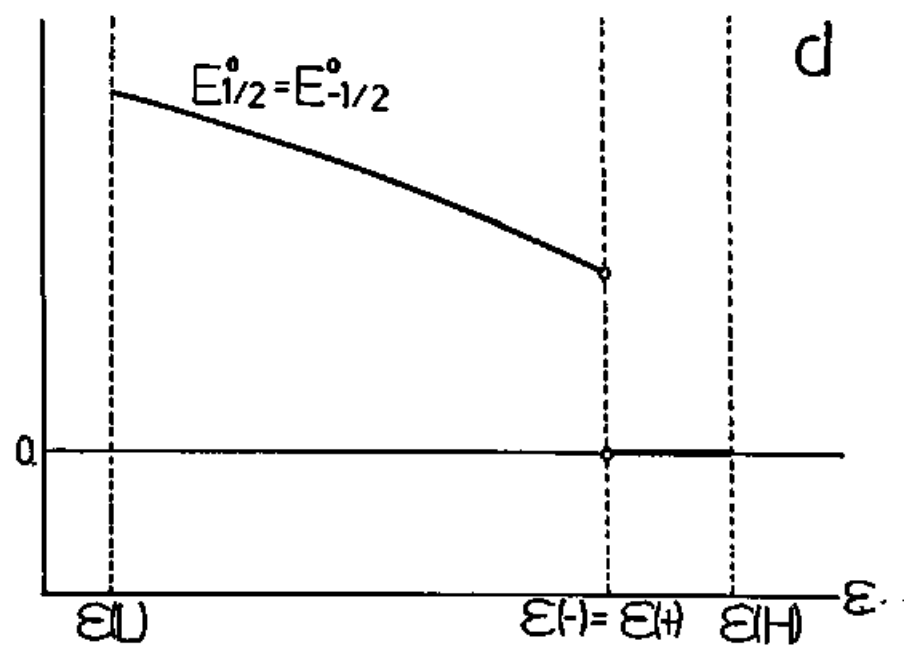
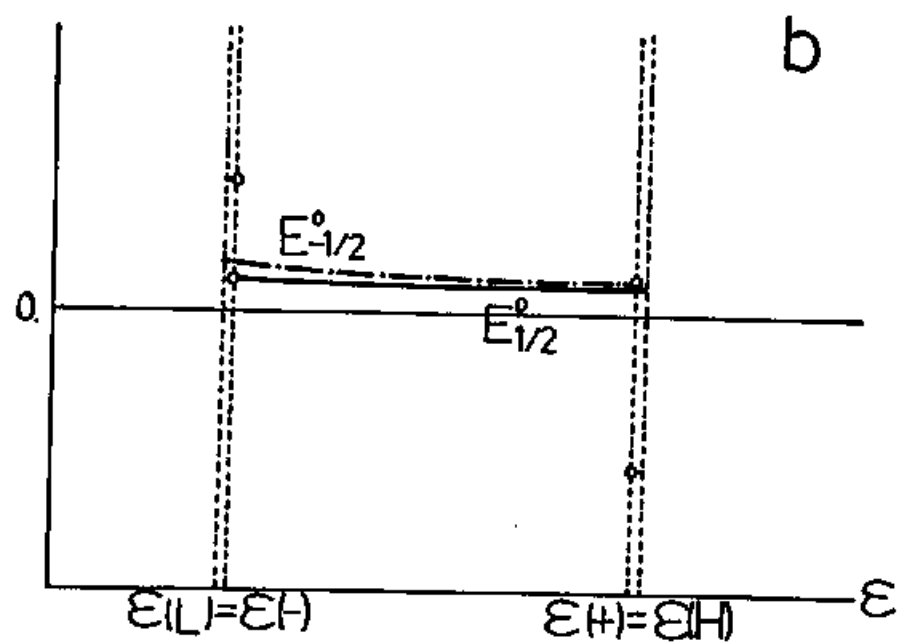
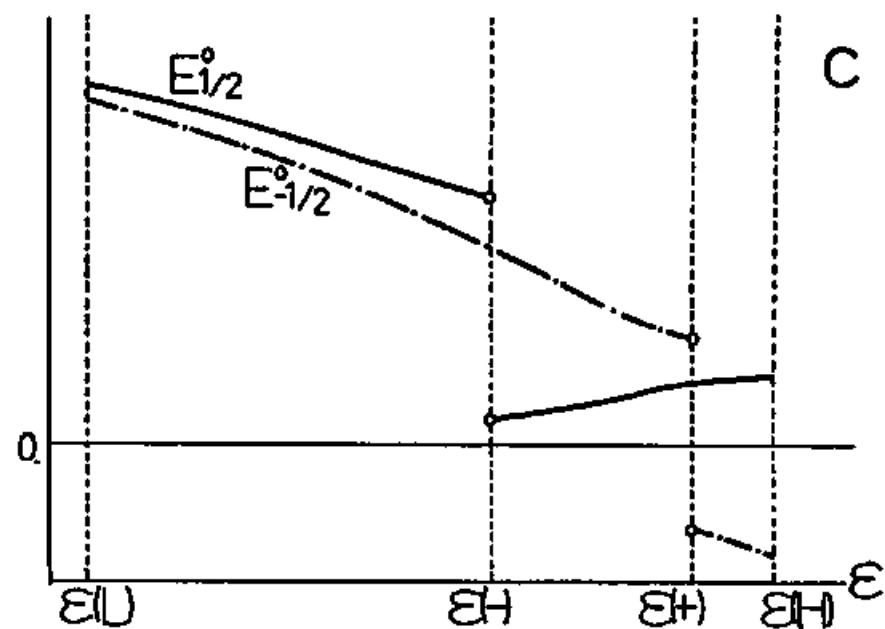
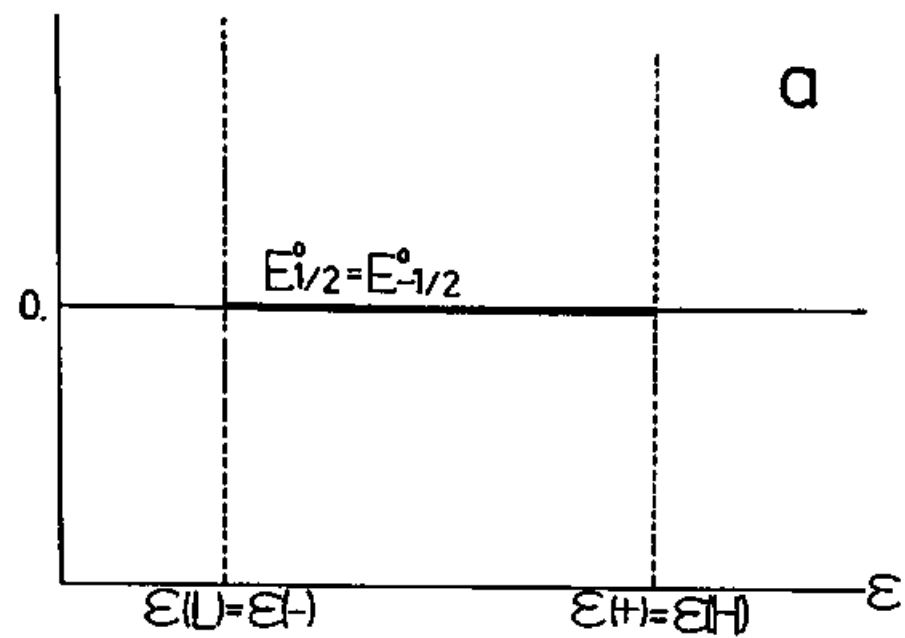


图 3.8

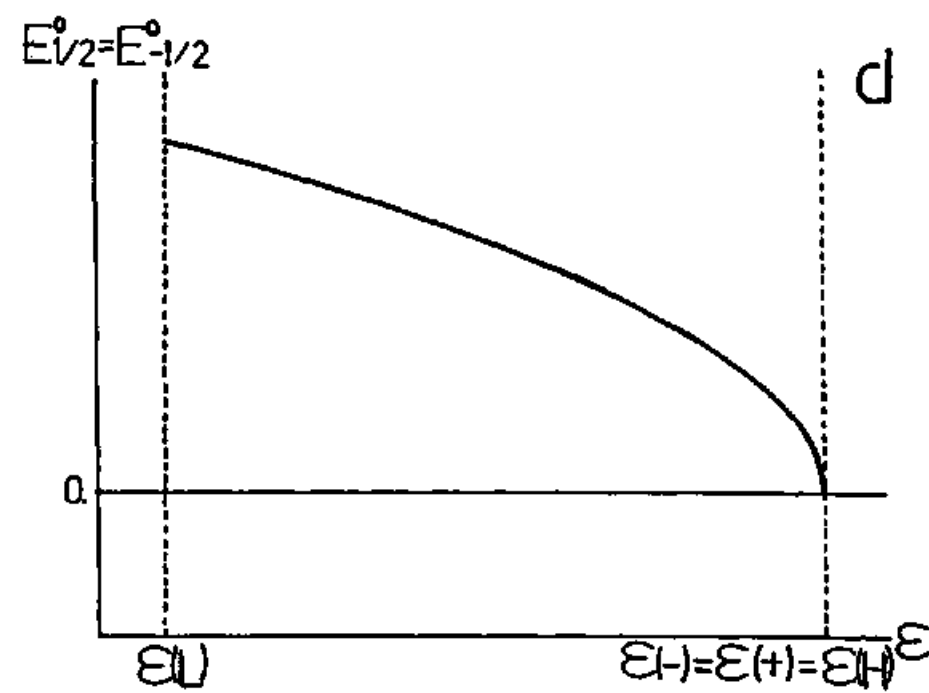
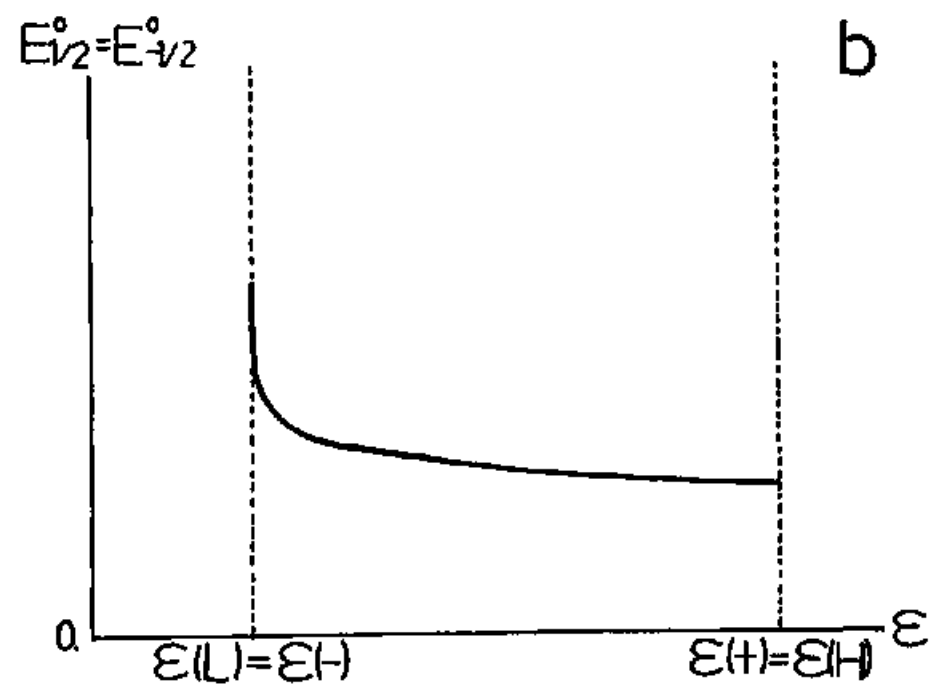
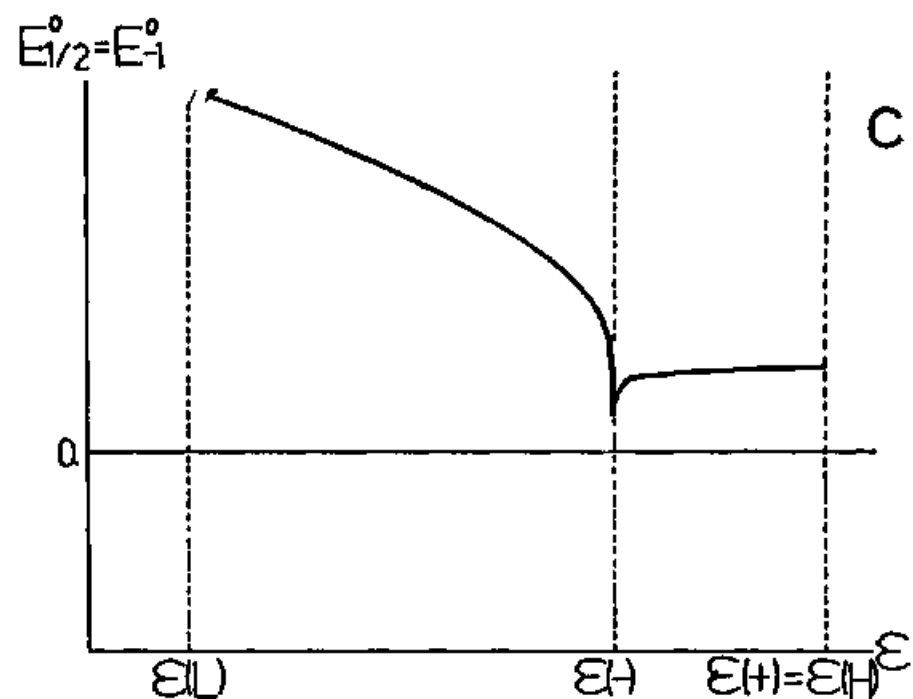
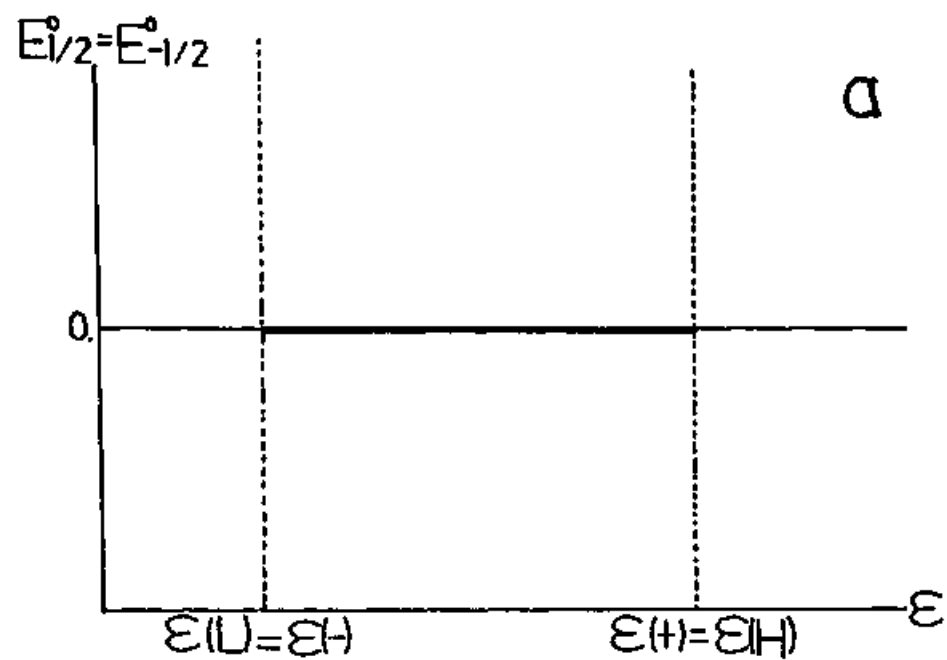
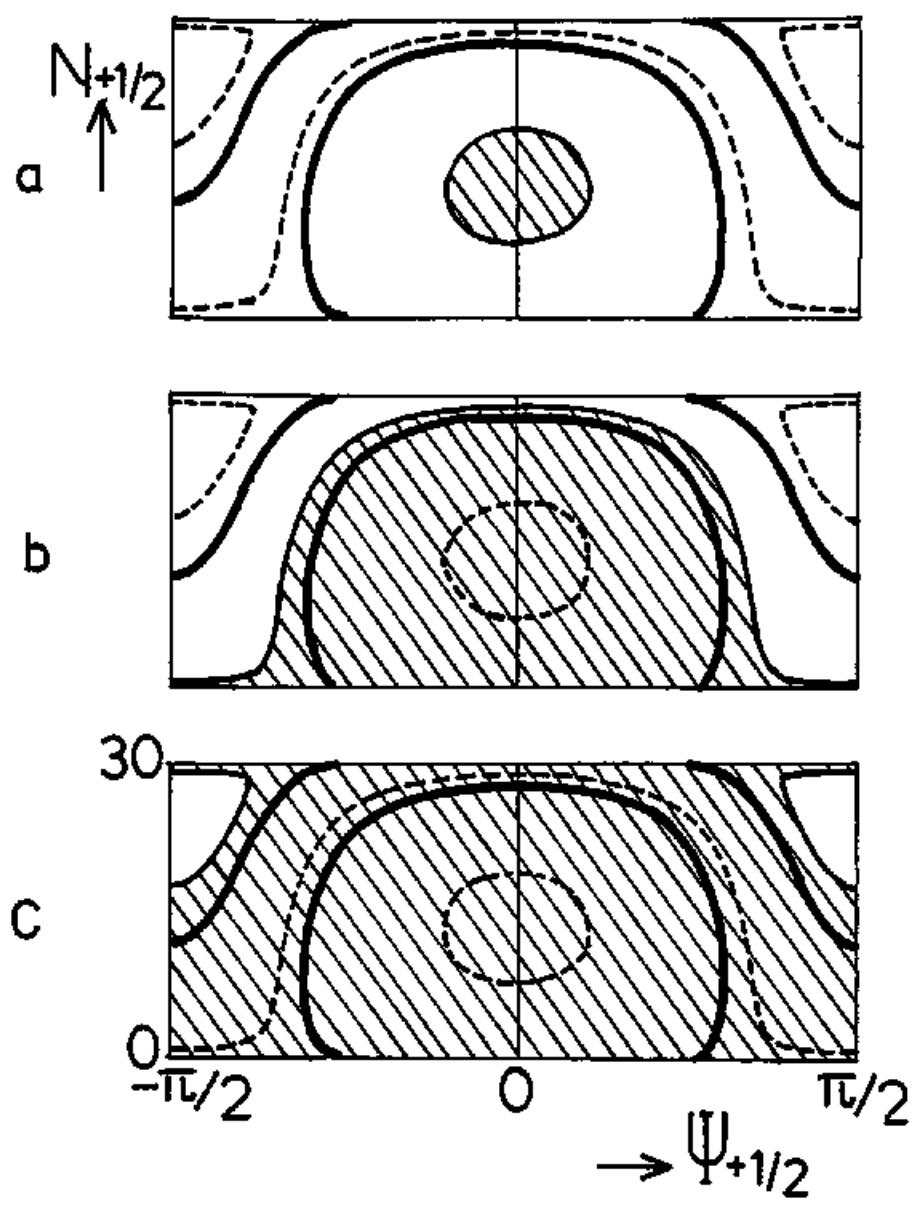
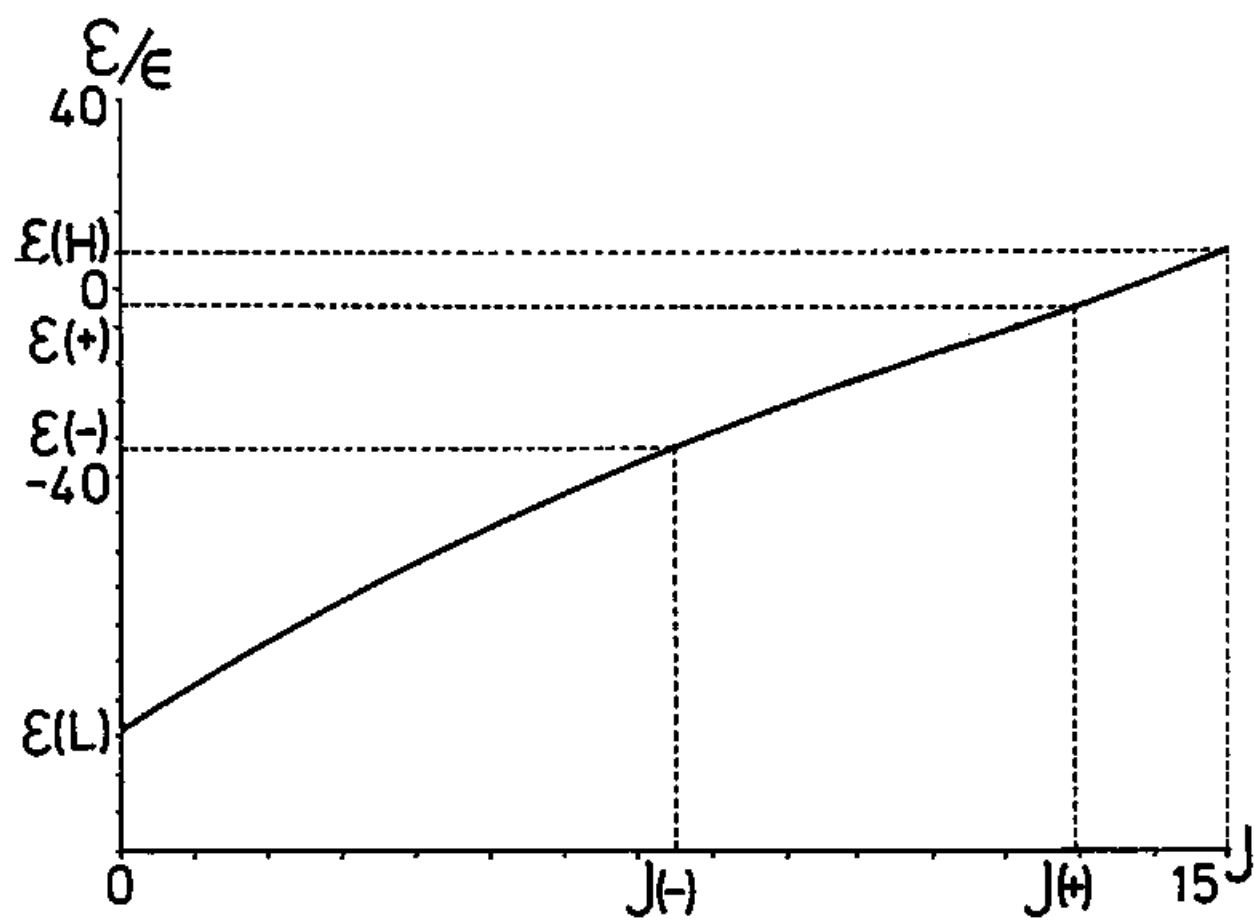
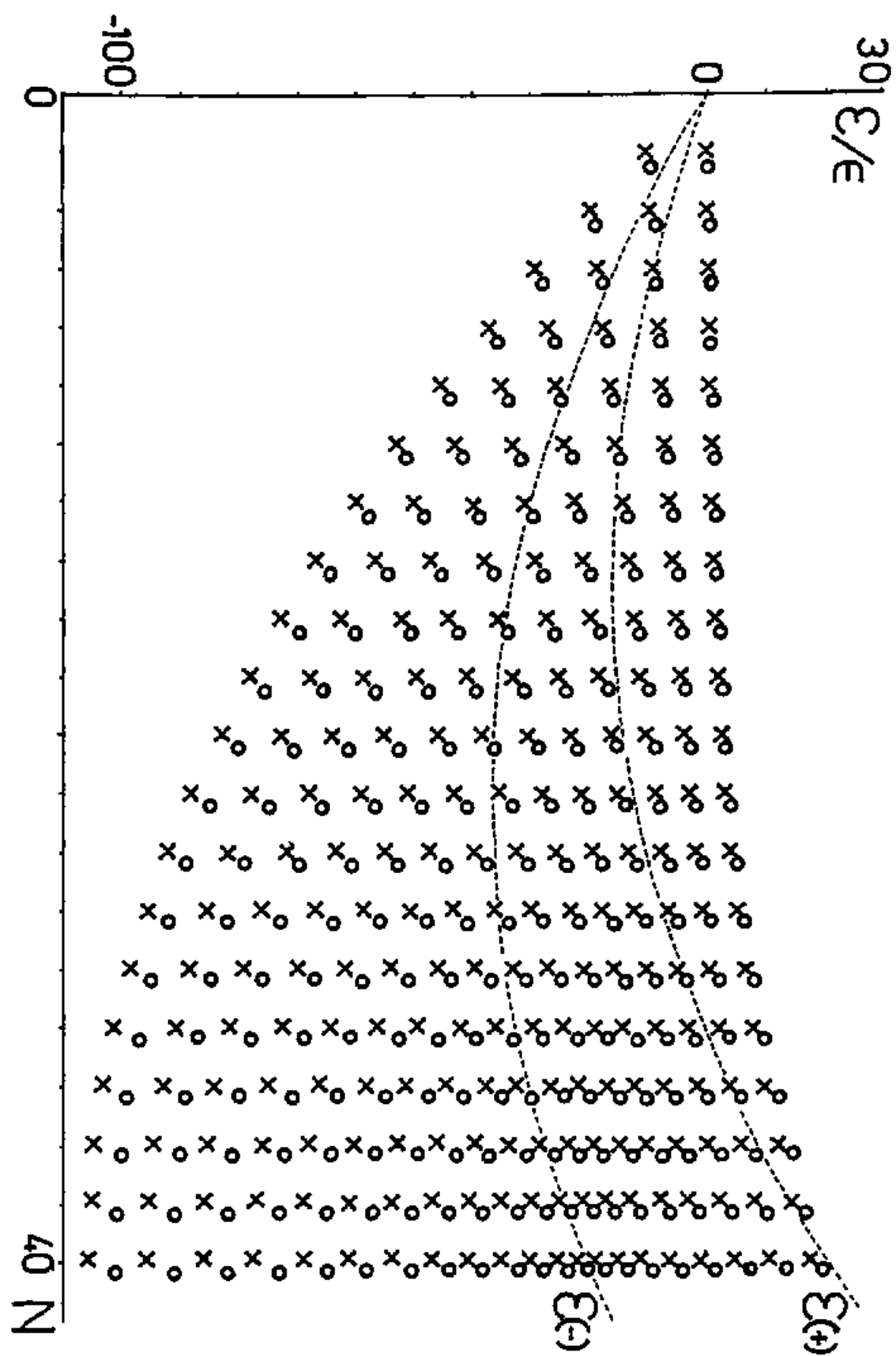
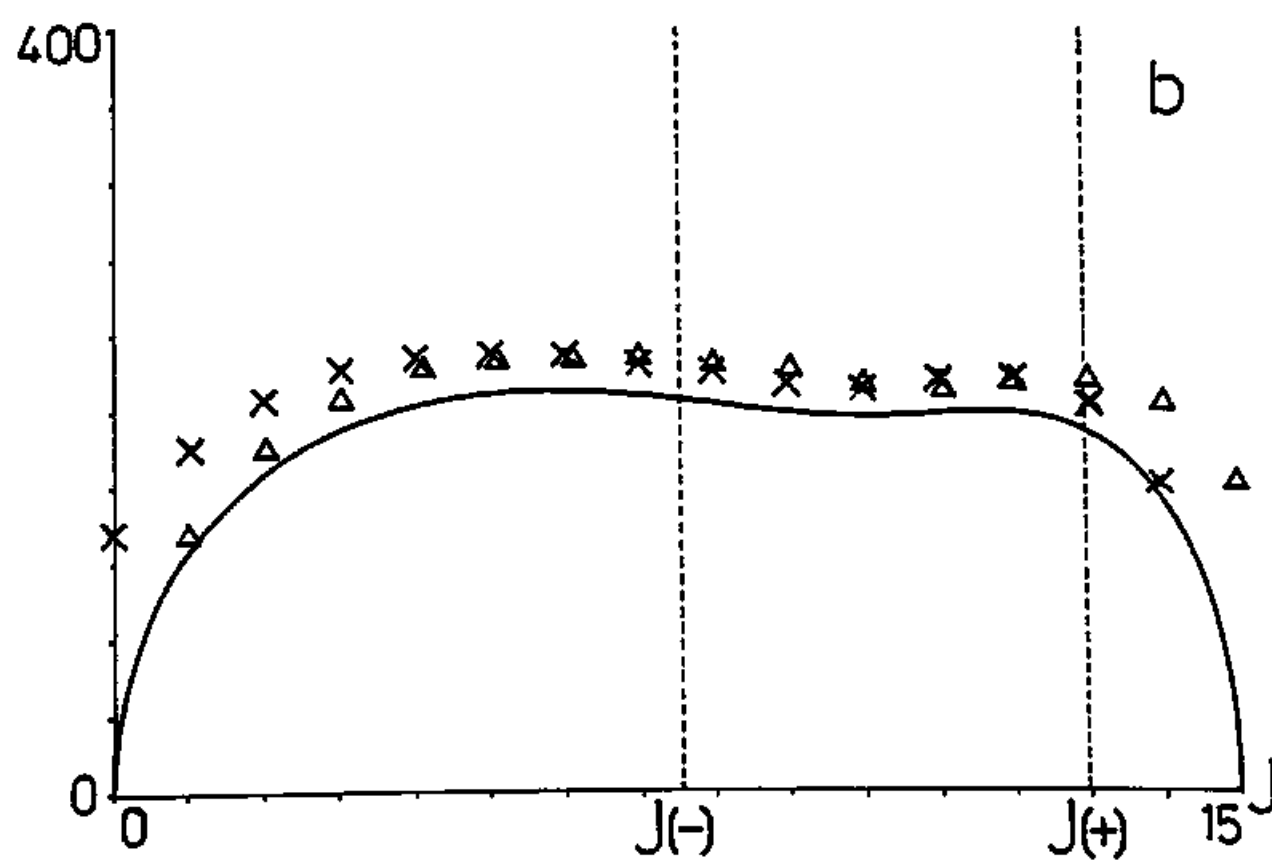
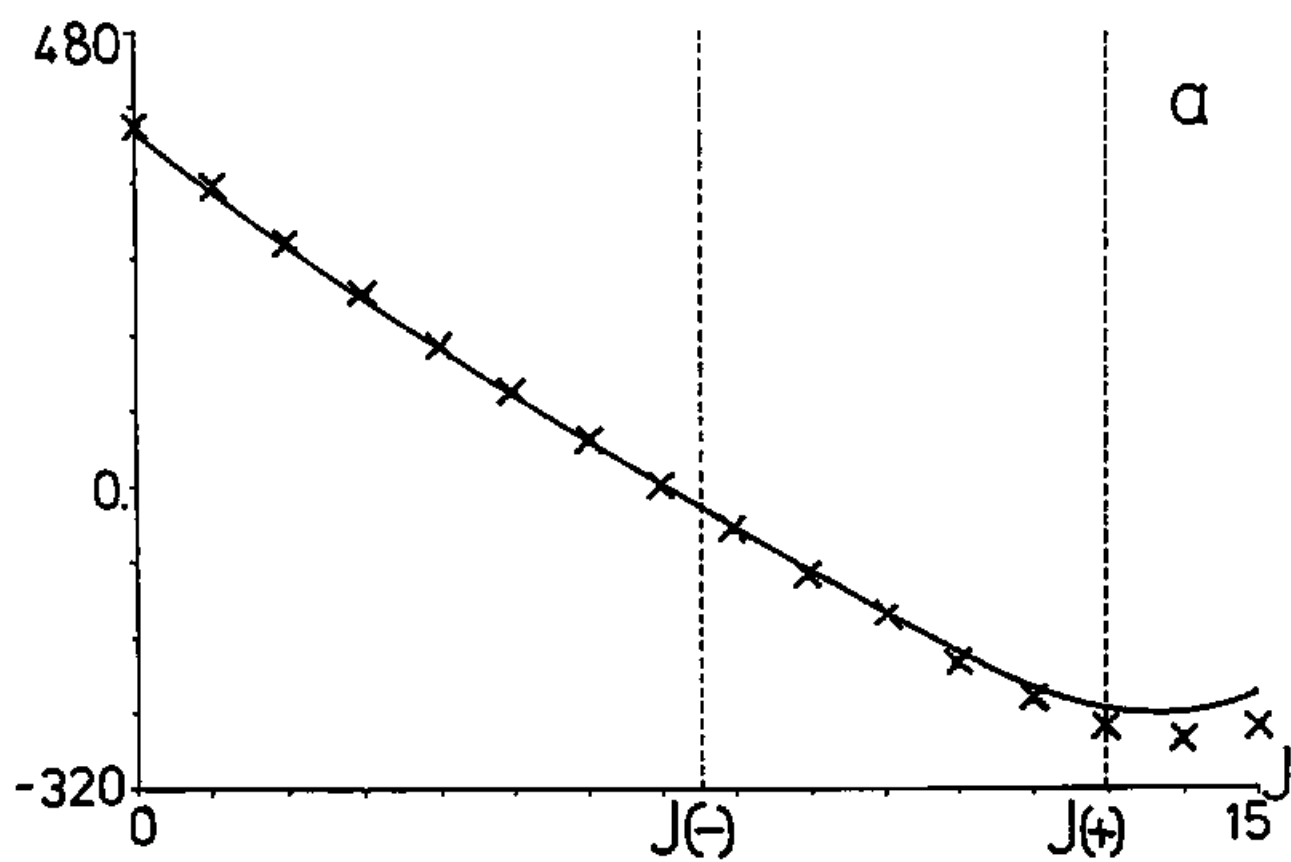


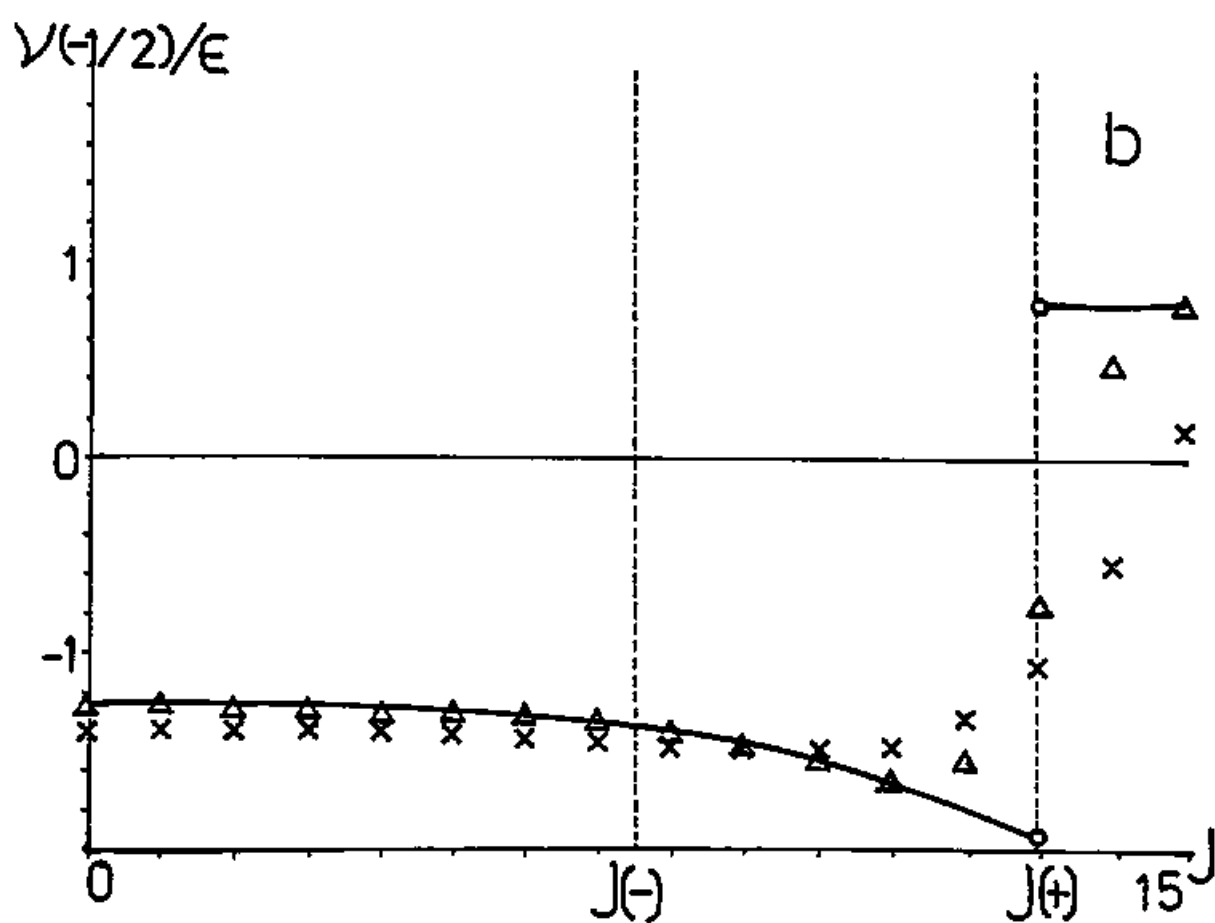
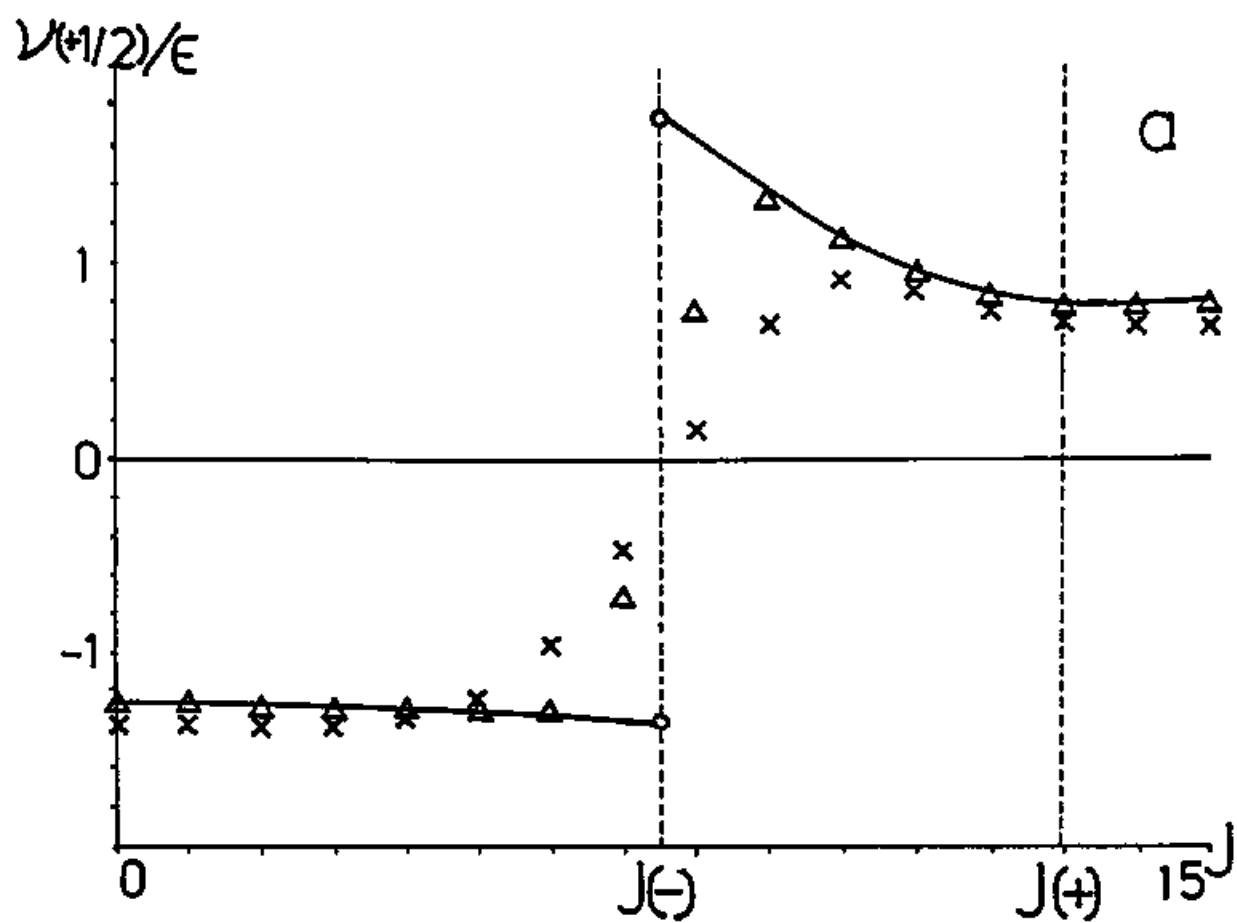
图 3.9











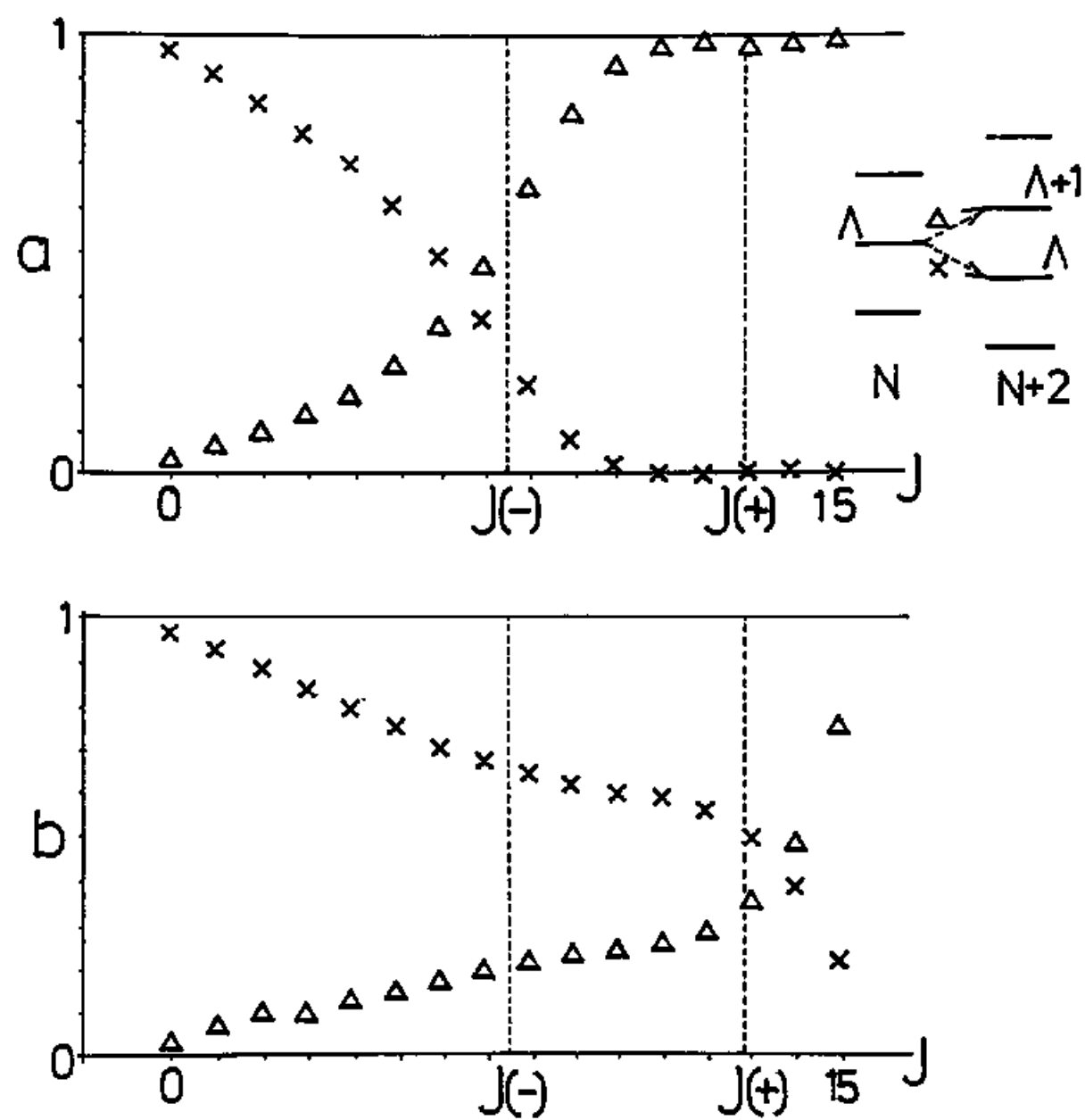


图 4.6

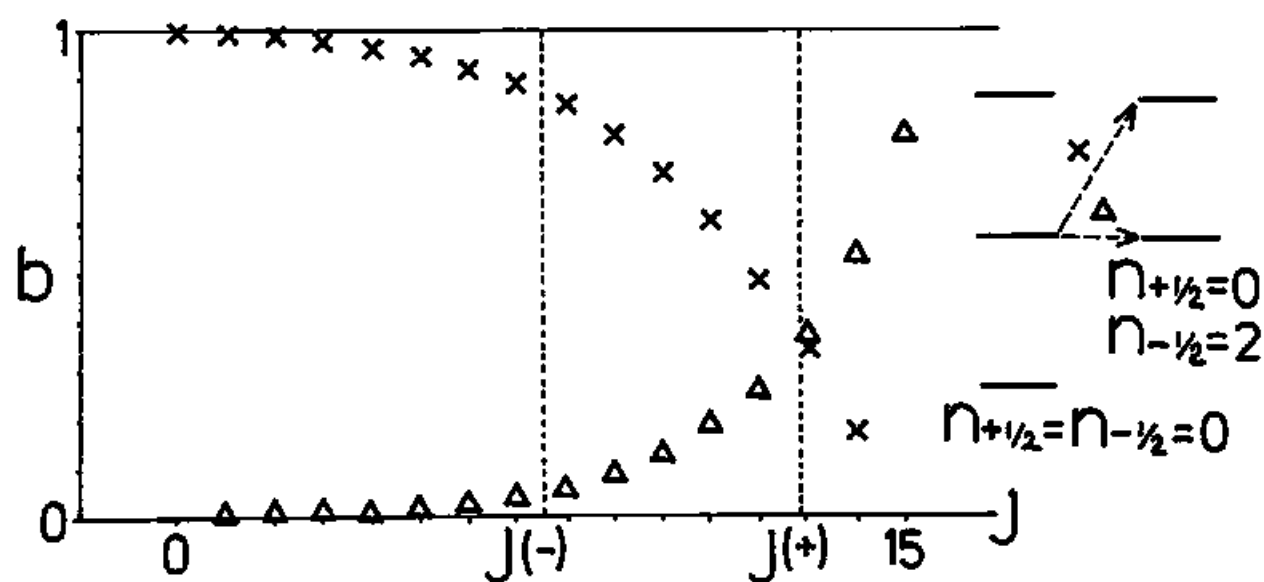
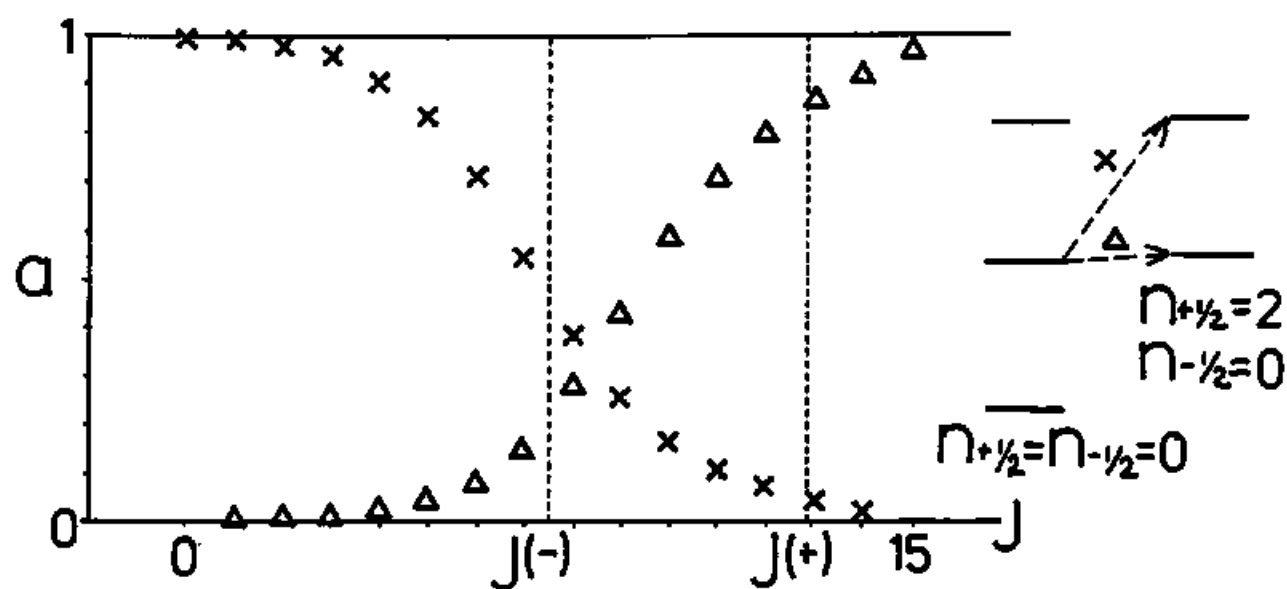


图 4.7

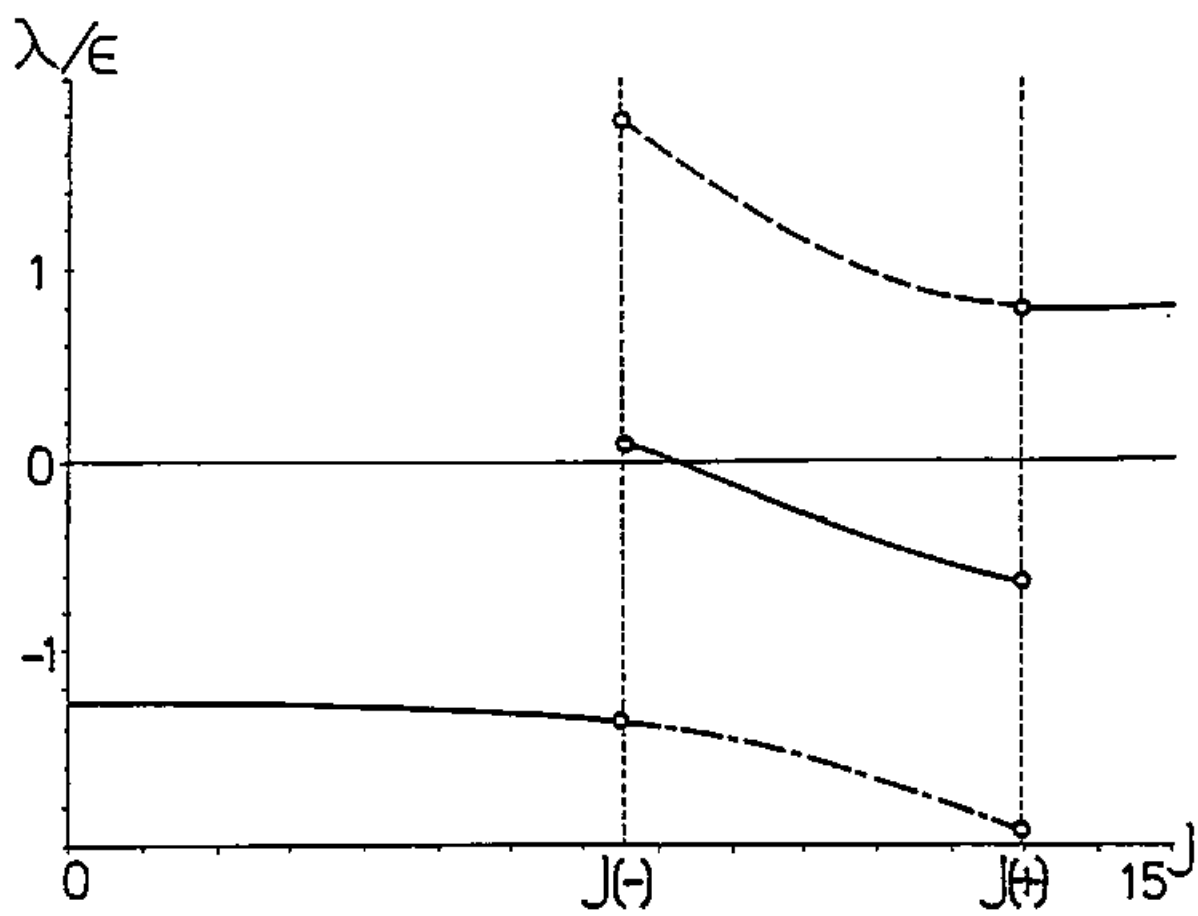


图 5 1

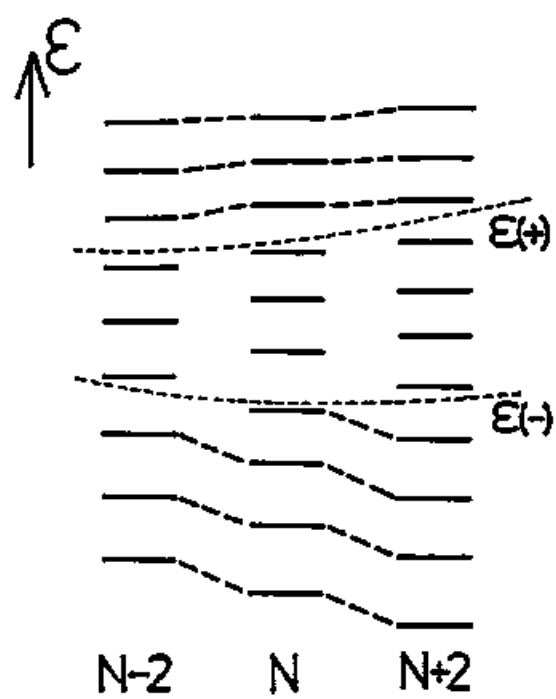


图 5.2

A Schematic Model of Large Amplitude Collective Motions
with an Exact Classical Solution. II
- Classical Analysis of Two-Level Pairing Hamiltonian -

Shinji IIDA

Department of Physics, Kyoto University, Kyoto 606

It is investigated how classical pictures of the whole phase space are connected with the original quantal system by using the two-level pairing model. Discontinuous shape changes of classical trajectories are shown to be related with the sudden changes of patterns in the transition strength between energy eigenstates. By introducing the collective and intrinsic coordinates representing pairing rotations and vibrations, respectively, these discontinuities can be interpreted as the breakdown of the excited pairing rotational band scheme.

§1. Introduction

One of the most important problem in nuclear physics is how to describe the large amplitude collective motions. The time dependent variational principle is one promising candidate and many attempts based on this principle have been made. For example, there are works on nucleus-nucleus reactions, giant resonances and anharmonicities of the low lying collective states.¹⁾

A description based on the above mentioned principle yields first-order differential equations for parameters of a trial function. Provided that certain conditions are satisfied in these equations, the description can be regarded as a kind of classical approximation to a quantal system.²⁾ A starting task in the classical approximation is to obtain classical trajectories by solving equations of motion. Since we are concerned with a quantal system, it is inevitable to investigate how the behaviors of these trajectories are connected with phenomena in the original quantal system under the consideration. Then, in many cases, these investigations give clear interpretations based on a classical picture to phenomena in the quantal system. Especially, the above 'classical analysis' of a quantal system may be important for the understanding of nuclear large amplitude collective motions. For typical examples, various phase transitions of nuclei, e.g. shape deformation, pairing phase transition etc., manifest themselves in changes of a self-consistent mean field of a ground state (Hartree-Fock-Bogoliubov state), which corresponds to an energy

minimum point in a classical picture.³⁾ Further, the random phase approximation (RPA) is powerful for an analysis of small amplitude motions around an energy minimum point. The RPA method gives not only excitation energies but also a criterion for stability of a ground state, and is useful to investigate phase transitions of nuclei.⁴⁾

Many investigations have been made about an energy minimum point (which is a peculiar classical trajectory consisting of one point in the classical phase space). For the description of large amplitude motions, it should be further necessary to investigate general classical trajectories over a wide region of the phase space. However, classical trajectories of the ordinary non-linear Hamiltonian systems show very complicated behavior, and there is no settled procedure to obtain information of the original quantal systems from classical quantities.⁵⁾ Only in the case that the Hamiltonian systems are integrable, quantal stationary states are connected with classical invariant tori by the Einstein-Brillouin-Keller quantization condition.⁶⁾ But, for these integrable cases, there are not so many classical analyses about the excited states in the whole energy region.⁷⁾

Recently, the present author, together with Yamamura, showed that the SU(2)-models reducing to essentially one dimensional problem (integrable models) can be analytically solved with the use of elliptic functions.⁸⁾ Further, the explicit solutions were given for the case of a two-level pairing model in Ref.9)

(hereafter, referred to as (A)), whose title is the same as the present paper. Through the numerical analysis for the solutions, we should learn that, in spite of the simple model, it contains some interesting features. In particular, classical trajectories of this system change discontinuously (classical phase changes) according to the change of the total energy. Following these changes, the whole phase space is divided into three distinct regions, except certain extreme cases. The aim of this paper is to investigate how the classical pictures in the whole phase space obtained in (A) are connected with the original quantal system, and especially to investigate how the discontinuous changes in classical picture are reflected in quantal quantities.

In §2., the main results of (A) are recapitulated. In §3., traces of classical phase changes in the quantal system are investigated. In §4., the collective and intrinsic coordinates are introduced and the behavior of the excited pairing rotational bands is discussed. Finally, §5. summarizes the results.

§ 2. Classical theory of two-level pairing Hamiltonian

The model treated in (A) consists of two non-degenerate orbits with the same degeneracy $\Omega (= 2j+1)$ and N particles interacting via a pairing force. This model were used to demonstrate mechanics of pairing phase transition, or pairing rotations and vibrations.^{(10), (12)} The Hamiltonian is as follows :

$$\hat{H} = \epsilon \sum_{\sigma} \hat{N}_{\sigma} - G/4 \cdot (\sum_{\sigma} \hat{P}_{\sigma}^+) (\sum_{\sigma} \hat{P}_{\sigma}) \quad , \quad (2.1)$$

$$\hat{P}_{\sigma}^+ = \sum_{m=-j}^j (-)^{j-m} \hat{C}_{\sigma, m}^+ \hat{C}_{\sigma, -m} \quad , \quad (2.2a)$$

$$\hat{N}_{\sigma} = \sum_{m=-j}^j \hat{C}_{\sigma, m}^+ \hat{C}_{\sigma, m} \quad , \quad (2.2b)$$

where $\sigma = \pm 1/2$ specifies single particle states, and $\hat{C}_{\sigma, m}$ ($\hat{C}_{\sigma, m}^+$) denotes the fermion annihilation (creation) operator in the state (σ, m) .

Corresponding representations in classical mechanics are obtained by the following replacements:

$$\hat{N}_{\sigma} \rightarrow N_{\sigma} \quad , \quad (2.3a)$$

$$\hat{P}_{\sigma}^+ \rightarrow P_{\sigma}^* = \sqrt{(\Omega - n_{\sigma} - N_{\sigma})(N_{\sigma} - n_{\sigma})} e^{2i\Phi_{\sigma}} \quad . \quad (2.3b)$$

Here, N_{σ} and n_{σ} denote classical images of the particle and seniority numbers of the level σ , respectively. Then, the classical Hamiltonian is written down as follows:

$$\mathcal{H} = \epsilon \sum_{\sigma} \sigma N_{\sigma} - G/4 \cdot \left(\sum_{\sigma} P_{\sigma}^* \right) \left(\sum_{\sigma} P_{\sigma} \right) \quad (2.4)$$

Hereafter, we consider the case where seniority numbers are zero ($n_{\sigma} = 0$). Therefore, this classical system is described by two pairs of canonically conjugate variables ($N_{\sigma}, \bar{\Phi}_{\sigma}; \sigma = \pm 1/2$) (two dimensional system). Clearly, total energy (\mathcal{E}) and total particle number ($N = N_{+1/2} + N_{-1/2}$) are constants of motions and, then, this classical system is integrable.

By drawing trajectories in phase space, a good perspective of classical motions can be obtained. For the case $\Omega = 40$, $\epsilon/G\Omega = 0.1$ and $N=30$, Fig. 1 shows classical trajectories of various energies projected onto ($N_{+1/2}, \bar{\Phi}_{+1/2} = \bar{\Phi}_{+1/2} - \bar{\Phi}_{-1/2}$) plane. According to the shape of classical trajectories, whole phase space is divided into three distinct regions which correspond to following energy intervals: ($\mathcal{E}(L), \mathcal{E}(-)$), ($\mathcal{E}(-), \mathcal{E}(+)$), ($\mathcal{E}(+), \mathcal{E}(H)$). Here, $\mathcal{E}(L)$ and $\mathcal{E}(H)$ denote the minimum and the maximum energies of the system, respectively. The symbols $\mathcal{E}(-)$ and $\mathcal{E}(+)$ represent

$$\mathcal{E}(-) = -N/2 \cdot \left[\epsilon + G/2 \cdot (\Omega - N) \right] \quad , \quad (2.5a)$$

$$\mathcal{E}(+) = N/2 \cdot \left[\epsilon - G/2 \cdot (\Omega - N) \right] \quad , \quad (2.5b)$$

Classical solutions of this model can be explicitly written down with the use of elliptic functions.

$$N_{+1/2}(t) = M_0 - (M_0 - M_1) \cdot \text{sn}^2(2K/T \cdot t, k) , \quad (2.6a)$$

$$N_{-1/2}(t) = N - N_{+1/2}(t) , \quad (2.6b)$$

$$\Phi_{+1/2}(t) = \Phi_{+1/2}(0) + \mathcal{V}(+1/2) \cdot t + \tilde{\Phi}_{+1/2}(t) , \quad (2.7a)$$

$$\Phi_{-1/2}(t) = \Phi_{-1/2}(0) + \mathcal{V}(-1/2) \cdot t + \tilde{\Phi}_{-1/2}(t) , \quad (2.7b)$$

The symbol $\text{sn}(\)$ denotes one of Jacobi's elliptic functions, and the symbols K and k mean the complete elliptic integral of the first kind and the modulus, respectively. Then, $N_{\sigma}(t)$ are periodic functions with the period T which is one of the fundamental periods of this system. The quantities M_0 and M_1 are the maximum and minimum values of $N_{+1/2}(t)$ along the trajectories (see Fig. 1). The quantities $\Phi_{\sigma}(0)$ are appropriate initial values and $\tilde{\Phi}_{\sigma}(t)$ are periodic functions with the period T . The functions $N_{\sigma}(t)$ are continuous with respect to constants of motions \mathcal{E} and N . As for $\Phi_{\sigma}(t)$, however, $\mathcal{V}(\sigma)$ and $\tilde{\Phi}_{\sigma}(t)$ have discontinuities at $\mathcal{E} = \mathcal{E}(-)$ and $\mathcal{E}(+)$ (as for the behaviors of $\mathcal{V}(\sigma)$, see Figs. 5). Further, $\mathcal{V}(\sigma)$ satisfy the following relations :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(+1/2) &= \mathcal{V}(-1/2) , \quad (\mathcal{E}(L) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(-) , \mathcal{E}(+) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(H)) \\ \mathcal{V}(+1/2) &= \mathcal{V}(-1/2) + \pi/T . \quad (\mathcal{E}(-) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(+)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Then, the increase of $\Psi_{+1/2} = \Phi_{+1/2} - \Phi_{-1/2}$ during one period T is as follows :

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_{+1/2} &= \Psi_{+1/2}(T) - \Psi_{+1/2}(0) \\ &= \begin{cases} 0, & (\mathcal{E}(L) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(-), \mathcal{E}(+) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(H)) \\ \pi, & (\mathcal{E}(-) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(+)) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.9)$$

This causes the discontinuous shape changes of classical trajectories (classical phase changes) at $\mathcal{E} = \mathcal{E}(-)$ and $\mathcal{E}(+)$. Therefore, it may be an interesting problem to investigate traces of these discontinuities (especially appearing in $\mathcal{V}(\mathcal{A})$) in the original quantal system. The main aim of this paper is to give a possible interpretation for this problem.

§3. Phase change in quantal system

In this section, we investigate how the phase changes appearing in the corresponding classical system are reflected in the original quantal system. As mentioned in §2., this system is integrable, and the old quantum theory is applicable in order to quantize the classical system. First, replacing action variables with appropriate integers, we can select the classical motions corresponding to the quantal stationary states.

$$I = N_{+1/2} + N_{-1/2} = N : \text{even integers} \quad , \quad (3.1a)$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint dN_{+1/2} d\Phi_{+1/2} = \Lambda : \text{integers} \quad , \quad (3.1b)$$

Integrals in Eq.(3.1b) are defined by hatched areas shown in Figs.2. For a given N , J increases monotonously according to energy \mathcal{E} . In the present case, N and Λ take the following values :

$$N = 0, 2, \dots, 2\Omega \quad , \quad (3.2a)$$

$$\Lambda = 0, 1, \dots, \begin{cases} N/2 & (N \leq \Omega) \\ \Omega - N/2 & (N > \Omega) \end{cases} \quad . \quad (3.2b)$$

With the use of the conditions (3.2), discrete energy eigenvalues are obtained. Next, for calculating the matrix elements, we adopt an idea similar to that in the case of dipole transition in hydrogen atom. For a given classical motion, any physical quantity \mathcal{O} can be expanded into Fourier series in the following way :

$$\mathcal{O}(t) = \sum_{m_I, m_J} \mathcal{O}(I, J; m_I, m_J) e^{i(m_I \omega_I + m_J \omega_J)t} \quad , \quad (3.3)$$

where m_I and m_J are integers , and ω_I and ω_J are fundamental frequencies accompanied with I and J , respectively. The Fourier coefficients of the above expansion are related to the matrix elements of $\hat{\mathcal{O}}$ which is an operator corresponding to the classical quantity \mathcal{O} :

$$\langle N', \Lambda' | \hat{\mathcal{O}} | N, \Lambda \rangle = \begin{cases} \mathcal{O}(N', \Lambda'; N-N, \Lambda'-\Lambda) \\ \text{or} \\ \mathcal{O}(N, \Lambda; N'-N, \Lambda'-\Lambda) \end{cases} \quad . \quad (3.4)$$

Here, the state $|N, \Lambda\rangle$ is a quantal counterpart of the classical motions denoted by the set of action variables ($I=N, J=\Lambda$). Within the framework of the old quantum theory, matrix elements of \hat{O} (l.h.s. of Eq.(3.4)) cannot be connected with the Fourier coefficients uniquely. For example, possible choices of the Fourier coefficients are given on the r.h.s. of Eq.(3.4). Later, when we compare the quantal results with the classical ones, both choices in Eq.(3.4) will be shown.

Figure 3 shows the exact (calculated in the quantal system) and the classical (calculated by the quantization rule (3.2)) energy eigenvalues. We can see overall agreement between both the values. Dashed lines denote the values of energy corresponding to $\mathcal{E}(+)$ and $\mathcal{E}(-)$ where phase changes occur in the classical system. It is difficult, however, to know what happens on these lines by only watching this discrete energy spectrum. As a typical example for matrix elements, the diagonal and non-diagonal (between $J = \Lambda$ and $\Lambda+1$) elements of $\hat{p}_{+1/2}^\dagger \hat{p}_{-1/2}$ calculated in both quantal and classical systems are shown versus the action variable J in Figs. 4. The positions of $J=J(+)$ and $J=J(-)$ which correspond to the critical energies $\mathcal{E} = \mathcal{E}(+)$ and $\mathcal{E} = \mathcal{E}(-)$ are indicated by vertical dotted lines. It should be noted that classical results are continuous at $J=J(\pm)$ ($\mathcal{E} = \mathcal{E}(\pm)$). Not only diagonal elements but also non-diagonal ones are well reproduced by the classical description. From these comparisons, we can conclude the validity of the classical description as an approximation to the full

quantum mechanical treatment in the present case. Therefore it may be meaningful to investigate the traces of the features of the classical system in the quantal one.

The phase changes in the classical system appear as the discontinuities of $\mathcal{V}(\sigma)$. Therefore we first look for the quantal counterparts of these quantities. From Eq.(2.7), we obtain the time derivatives of Φ_σ as follows :

$$\dot{\Phi}_\sigma = \mathcal{V}(\sigma) + (\text{Fourier series without constant terms}) \quad (3.5)$$

Thus, following the correspondence (3.4), the counterparts of $\mathcal{V}(\sigma)$ is as follows :

$$\mathcal{V}(\sigma) (I=N, J=\Lambda) \leftrightarrow \langle N, \Lambda | \hat{\Phi}_\sigma | N, \Lambda \rangle \quad , \quad (3.6)$$

where $\hat{\Phi}_\sigma$ is an operator corresponding to the classical variable Φ_σ (for details of operators $\hat{\Phi}_\sigma$, see ref.11). A time-derived operator \hat{O} is defined by $i[\hat{H}, \hat{O}]$, where $[,]$ denotes a commutator. For the case $\hat{\Phi}_\sigma$, we have

$$\hat{\Phi}_\sigma = i[\hat{H}, \hat{\Phi}_\sigma] = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{N}_\sigma} (\hat{N}_{\pm 1/2}, \hat{\Phi}_{\pm 1/2}) \quad . \quad (3.7)$$

The comparison between $\langle \hat{\Phi}_\sigma \rangle$ and $\mathcal{V}(\sigma)$ are shown in Figs.5 . Although the results of the quantal system, as expected, vary more smoothly compared with the classical ones, there can be still found the enough trace of the discontinuities appearing in the classical system. If we increase the values of Ω and N , keeping N/Ω constant (then, the classical results are only

7)
scaled up proportionally), this trace becomes more evident as shown in Figs.5, and in the 'classical' limit ($N, \Omega \rightarrow \infty$) the quantal results are supposed to coincide with classical ones. Therefore, from the above, we find that the phase changes observed in the classical system are certainly reflected within the direct counterparts of $\chi(\sigma)$ (, that is, $\langle \hat{\Phi}_\sigma \rangle$).

From the above arguments, it may be important to clarify the physical meaning of the quantities $\langle \hat{\Phi}_\sigma \rangle$. They may be connected with certain transition strength between eigenstates. Then, we can interpret the phase changes observed in the classical system with the use of energy spectra and transitions among them. First, the function $G_\sigma(\Delta N)$ is defined as follows :

$$G_\sigma(\Delta N) = \langle N, \Lambda | e^{-i\Delta N \hat{\Phi}_\sigma} \hat{H} e^{i\Delta N \hat{\Phi}_\sigma} | N, \Lambda \rangle \quad (3.8)$$

Then, ΔN -derivative of $G_\sigma(\Delta N)$ is

$$\frac{dG_\sigma(\Delta N)}{d(\Delta N)} = \langle N, \Lambda | e^{-i\Delta N \hat{\Phi}_\sigma} \hat{\Phi}_\sigma e^{i\Delta N \hat{\Phi}_\sigma} | N, \Lambda \rangle \quad (3.9)$$

Inserting $1 = \sum_{N', \Lambda'} |N', \Lambda'\rangle \langle N', \Lambda'|$ into both sides of \hat{H} , Eq.(3.8) is transformed into the following form :

$$G_\sigma(\Delta N) = \sum_{N', \Lambda'} \mathcal{E}(N', \Lambda') |\langle N', \Lambda' | e^{i\Delta N \hat{\Phi}_\sigma} | N, \Lambda \rangle|^2 \quad (3.10)$$

where $|N', \Lambda'\rangle$ is an eigenstate of \hat{H} and $\mathcal{E}(N', \Lambda')$ is its eigenvalue. With the use of Eqs.(3.9) and (3.10), $\langle \hat{\Phi}_\sigma \rangle$ is expressed as follows :

$$\begin{aligned} \langle N, \Lambda | \hat{\Phi}_\sigma | N, \Lambda \rangle &= \left. \frac{dG_\sigma(\Delta N)}{d(\Delta N)} \right|_{\Delta N=0} \\ &= \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \left[\sum_{N', \Lambda'} (\mathcal{E}(N', \Lambda') - \mathcal{E}(N, \Lambda)) \cdot |\langle N', \Lambda' | e^{i\Delta N \hat{\Phi}_\sigma} | N, \Lambda \rangle|^2 \right] / \Delta N \end{aligned} \quad (3.11)$$

Therefore, for the sufficiently small value of ΔN , $\Delta N \cdot \langle N, \Lambda | \hat{\Phi}_\sigma | N, \Lambda \rangle$ is approximately equal to the average of the excitation energy of the states excited from $|N, \Lambda\rangle$ by the operator $e^{i\Delta N \hat{\Phi}_\sigma}$. Here some comments are made on the meaning of the operator $e^{i\Delta N \hat{\Phi}_\sigma}$. The angle $\hat{\Phi}_\sigma$ is canonically conjugate to the particle number operator of level σ , \hat{N}_σ . Then, $\hat{\Phi}_\sigma$ dependence of any operators $\hat{O}_\sigma(\Delta N)$ which transfer ΔN particles of level σ is as follows:

$$\hat{O}_\sigma(\Delta N) = \hat{A}(\hat{N}_\sigma + \frac{1}{2}, \hat{N}_\sigma - \frac{1}{2}) \cdot e^{i\Delta N \hat{\Phi}_\sigma} \quad (3.12)$$

One typical example is \hat{P}_σ^+ whose classical image is given in Eq.(2.3b). Therefore, $e^{i\Delta N \hat{\Phi}_\sigma}$ is a common factor for all the operators varying the particle number of level σ by ΔN . Through the relation (3.11), it can be expected that the classical phase changes appearing in $\mathcal{V}(\sigma)$ are also reflected in the distribution of the transition strength for $e^{i\Delta N \hat{\Phi}_\sigma}$. Figures 6.a and 6.b show $|\langle f | e^{i\frac{1}{2}\hat{\Phi}_\sigma} | N, \Lambda \rangle|^2$ and $|\langle f | e^{i\frac{1}{2}\hat{\Phi}_\sigma} | N, \Lambda \rangle|^2$, respectively (for the case $\Delta N=2$). The case $|f\rangle = |N+2, \Lambda+1\rangle$ is denoted by F_u , and the case $|f\rangle = |N+2, \Lambda\rangle$, by F_d . It can be seen from Figs.6 that the relation of amplitude between F_u and F_d changes from $F_d > F_u$ to $F_d < F_u$ according as J crosses $J(-)$ (which corresponds to $\xi(-)$) for the case $\hat{\Phi}_\sigma + \frac{1}{2}$ and $J(+)$ (which corresponds to $\xi(+)$) for the case $\hat{\Phi}_\sigma - \frac{1}{2}$. These changes are nothing but the traces of the classical phase changes. The classical results imply that this change of the strength distribution occurs suddenly in the 'classical'

limit . For the case shown in Figs.6, the following inequalities hold (see Fig.3):

$$\mathcal{E}(N, \Lambda) < \mathcal{E}(N+2, \Lambda+1) \quad , \quad (3.13a)$$

$$\mathcal{E}(N, \Lambda) > \mathcal{E}(N+2, \Lambda) \quad . \quad (3.13b)$$

Then, from Figs.6 , the average excitation energy defined by the r.h.s. of Eq.(3.11) is expected to change its sign from minus to plus when J crosses $J(-)$ for the case $\hat{\Phi} + \frac{1}{2}$ and J crosses $J(+)$ for the case $\hat{\Phi} - \frac{1}{2}$. This expectation explains the behaviors of $\langle \hat{\Phi}_0 \rangle$ and $\mathcal{V}(\sigma)$ in Figs.5.

§4. Pairing rotations and vibrations

In this section, we will show that the discontinuities appearing in the classical system can be interpreted as the breakdown of excited pairing rotational band scheme. For this aim, collective and intrinsic variables (representing pairing rotations and vibrations ¹²⁾ in the present case, respectively) are introduced.

Recently, solving a generalized equation of collective submanifold, the present author, together with Yamamura and Kuriyama, have given the expressions in which the total degrees of freedom are separated into the collective and the intrinsic ones for classical systems where Hamiltonian depends only on relative coordinates ¹³⁾. Hereafter we will refer to this as (B). Classical many particle systems interacting through relative coordinate

dependent forces and classical images of fermion system with pairing correlations are examples of the above, and in this case collective and intrinsic motions represent, so to speak, generalized centre of mass and relative motions, respectively. In the present case, collective motions are expected to represent pairing rotational motions which are described by the total particle number N and its canonically conjugate angle Φ . However, Φ cannot be specified uniquely by the condition that N is the total particle number. For example, $\Phi = \alpha \Phi_{+1/2} + \beta \Phi_{-1/2}$ always satisfies a canonical variable condition provided that the relation $\alpha + \beta = 1$ holds. Then, we cannot specify the intrinsic coordinates (M, Ψ) which are independent of the collective coordinates (N, Φ) . The procedure of (B) is directly applicable in the present case, and the collective and intrinsic coordinates can be specified uniquely by this method. Here, it should be noted that the definitions of M and Φ are different from those used in (A). The results are as follows :

$$N_{+1/2} = N_{+1/2}^{(0)}(N) + M \quad , \quad (4.1a)$$

$$N_{-1/2} = N_{-1/2}^{(0)}(N) - M \quad , \quad (4.1b)$$

$$\Phi_{+1/2} = \Phi + dN_{-1/2}^{(0)}/dN \cdot \Psi \quad , \quad (4.2a)$$

$$\Phi_{-1/2} = \Phi - dN_{+1/2}^{(0)}/dN \cdot \Psi \quad . \quad (4.2b)$$

Here $N_{\sigma}^{(0)}(N)$ are the solutions of the B.C.S. equation which minimize total energy :

$$N_{+1/2}^{(0)}(N) + N_{-1/2}^{(0)}(N) = N \quad , \quad (4.3a)$$

$$\mathcal{H}(N_{\sigma} = N_{\sigma}^{(0)}(N), \bar{\Psi}_{+1/2} = \bar{\Phi}_{+1/2} - \bar{\Phi}_{-1/2} = 0) = \mathcal{E}(L) \quad . \quad (4.3b)$$

Namely, the point $(N_{+1/2} = N_{+1/2}^{(0)}(N), \bar{\Psi}_{+1/2} = 0)$ is a minimum of energy denoted by the symbol \bigcirc in Fig.1. Inverse transformations of Eqs.(4.1) and (4.2) are

$$N = N_{+1/2} + N_{-1/2} \quad , \quad (4.4a)$$

$$M = N_{+1/2} - N_{-1/2}^{(0)} \quad , \quad (4.4b)$$

$$\bar{\Phi} = dN_{+1/2}^{(0)}/dN \cdot \bar{\Phi}_{+1/2} + dN_{-1/2}^{(0)}/dN \cdot \bar{\Phi}_{-1/2} \quad , \quad (4.5a)$$

$$\bar{\Psi} = \bar{\Phi}_{+1/2} - \bar{\Phi}_{-1/2} \quad . \quad (4.5b)$$

Equations (2.6), (2.7), (4.4) and (4.5) give time dependences of $(N, \bar{\Phi})$ and $(M, \bar{\Psi})$. Here the results are written down for the case $\bar{\Phi}$ and $\bar{\Psi}$:

$$\bar{\Phi}(t) = \bar{\Phi}(0) + \lambda t + \tilde{\bar{\Phi}}(t) \quad , \quad (4.6a)$$

$$\bar{\Psi}(t) = \bar{\Psi}(0) + \lambda t + \tilde{\bar{\Psi}}(t) \quad , \quad (4.6b)$$

$$\lambda = dN_{+1/2}^{(e)}/dN \cdot \mathcal{V}(+1/2) + dN_{-1/2}^{(e)}/dN \cdot \mathcal{V}(-1/2) \quad , \quad (4.7a)$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(+1/2) - \mathcal{V}(-1/2) \quad , \quad (4.7b)$$

$$\hat{\Phi}(t) = dN_{+1/2}^{(e)}/dN \cdot \hat{\Phi}_{+1/2}(t) + dN_{-1/2}^{(e)}/dN \cdot \hat{\Phi}_{-1/2}(t) \quad , \quad (4.8a)$$

$$\hat{\Psi}(t) = \hat{\Phi}_{+1/2}(t) - \hat{\Phi}_{-1/2}(t) \quad , \quad (4.8b)$$

The quantity λ satisfies the relation :

$$\lambda = \partial \mathcal{E} / \partial N \mid \tilde{\mathcal{J}} \quad (4.9)$$

where \mathcal{E} is total energy and a function $\mathcal{E}(N, \tilde{\mathcal{J}})$ is obtained from an inverse relation of the following :

$$\tilde{\mathcal{J}} = \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{E}, N) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T M(t) \dot{\Psi}(t) dt \quad . \quad (4.10)$$

The relation between $\tilde{\mathcal{J}}$ and the action variable J defined by Eq.(3.1b) is as follows :

$$\tilde{\mathcal{J}} = \begin{cases} J & , \quad (\mathcal{E}(-) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(-)) \\ J - N^{(e)}/2 & , \quad (\mathcal{E}(-) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(+)) \\ J - N/2 & . \quad (\mathcal{E}(+) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(H)) \end{cases} \quad (4.11)$$

The values of λ are plotted versus J in Fig.7. Using Eq.(2.8) and the relation $\frac{dN_{+1/2}^{(e)}}{dN} + \frac{dN_{-1/2}^{(e)}}{dN} = 1$ derived from Eq.(4.3a), it can be seen from the definition of λ (4.7a) that λ equals to $\mathcal{V}(+1/2) = \mathcal{V}(-1/2)$ in the regions $(0 < J < J(-))$ and $(J(+) < J < N/2)$.

Since $\mathcal{V}(+1/2)$ ($\mathcal{V}(-1/2)$) has discontinuity at $J = J(-)$ ($J(+)$), λ jumps at $J(-)$ and $J(+)$ in general. In the same way as in §3., the counterparts of λ in the quantal system are obtained as follows :

$$\begin{aligned} \lambda(I=N, J=\Lambda) &\leftrightarrow \langle N, \Lambda | \hat{\Phi} | N, \Lambda \rangle \\ &= \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \left[\sum_{N', \Lambda'} (\mathcal{E}(N', \Lambda') - \mathcal{E}(N, \Lambda)) |\langle N', \Lambda' | e^{i\Delta N \hat{\Phi}} | N, \Lambda \rangle|^2 \right] / \Delta N. \quad (4.12) \end{aligned}$$

The variables (N, Φ) and (M, Ψ) are introduced as collective and intrinsic coordinates which represent pairing rotations and vibrations, respectively. Then, if there does not exist any coupling between rotational motions and vibrations, an energy eigenstate with the total particle number N is expressed in the following form :

$$|N, \Lambda\rangle = |\text{intrinsic}\rangle \otimes e^{iN\hat{\Phi}} \quad (4.13)$$

In the above case, the strength of the operator $e^{i\Delta N \hat{\Phi}}$ concentrates on one state which has the same intrinsic wave function as $|N, \Lambda\rangle$, ($|\text{intrinsic}\rangle \otimes e^{i(N+\Delta N)\hat{\Phi}}$). Namely, only transitions between states belonging to the same pairing rotational band are permissible. Then Eq.(4.12) becomes

$$\begin{aligned} &\langle N, \Lambda | \hat{\Phi} | N, \Lambda \rangle \\ &= \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \left[\mathcal{E}(N+\Delta N, \Lambda') - \mathcal{E}(N, \Lambda) \right] / \Delta N \Big|_{\text{same band}} = \frac{d\mathcal{E}}{dN} \Big|_{\text{same band}}. \quad (4.14) \end{aligned}$$

where $|N+\Delta N, \Lambda'\rangle$ and $|N, \Lambda\rangle$ belong to the same band. The above means that λ can be regarded as a chemical potential extended

to the case for a generally excited pairing rotational band. In fact, λ becomes an ordinary chemical potential at $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}(L)$. From the relations (4.12), (4.14) and the discussion of transition strength in §3. (see Figs.5 and 6), it can be seen from Fig.7 that, in the classical limit, $|N, \Lambda\rangle$ and $|N+2, \Lambda\rangle$ belong to the same rotational band for the case $0 < J < J(-)$, and for the case $J(+) < J < N/2$ $|N, \Lambda\rangle$ and $|N+2, \Lambda+1\rangle$ belong to the same band. For the case $J(-) < J < J(+)$, however, transition amplitude of $|N, \Lambda\rangle$ to $|N+2, \Lambda\rangle$ and of $|N, \Lambda\rangle$ to $|N+2, \Lambda+1\rangle$ are comparable generally (vibrational-like scheme). Therefore, there do not exist clear pairing rotational bands and the separation of the original coordinates $(N \pm \frac{1}{2}, \Phi \pm \frac{1}{2})$ into (N, Φ) and (M, Ψ) is not useful to classify energy eigenstates. Namely, (N, Φ) and (M, Ψ) seem to lose characters of the collective and intrinsic coordinates, respectively in this region. These are shown schematically in Fig.8 where states belonging to the same band are connected by dashed lines. Actually, in the neighbourhood of boundaries between different band schemes ($\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}(+)$ or $\hat{\epsilon}(-)$) the coupling of rotational motions and intrinsic motions is expected to be strong, so we may not imagine the picture of band structure.

Closing this section, some remarks should be made. In Eqs.(4.1) and (4.2), collective and intrinsic coordinates are introduced following (B), and this separation of original coordinates is adopted in the whole phase space. But in the procedure of (B), intrinsic motions are supposed to be small amplitude oscillations around

a zero point, originally. Therefore, this separation (4.1) and (4.2) seems to be suitable for the region ($\mathcal{E}(L) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(-)$) where time developments of M and Ψ are oscillations around the origin. However, it requires further investigations whether Eqs.(4.1) and (4.2) are physically suitable for the region ($\mathcal{E}(+) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(H)$) where M and Ψ oscillate around the finite values and especially for the region ($\mathcal{E}(-) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(+)$) where M and Ψ vary widely.

§ 5. Concluding remarks

In summary, we have investigated how classical pictures in the whole phase space are connected with the original quantal system in the case of the two-level pairing model. It is shown that discontinuous shape changes of classical trajectories are reflected in sudden changes of patterns in transition strength between energy eigenstates. Further, by introducing collective and intrinsic coordinates (representing pairing rotations and vibrations, respectively), these discontinuities can be interpreted as the breakdown of excited pairing rotational band scheme.

The two-level pairing Hamiltonian used here is a two dimensional simple model for which classical solutions can be explicitly written down. We add, finally, some general aspects which may be extrapolated from the analysis of this simple model. As far as concerned with the problems of bound-states, for finite Fermi systems and for Bose systems which are constrained by some conservation laws (e.g. total angular momentum), the available phase space of the corresponding classical system has a finite area. Then, there exist both energy-minimum points and energy-maximum points in a classical phase space. If a classical system is quasi-integrable and trajectories have meaning as an approximation to quantal states, then the system has at least two distinct regions ; one region consists of classical trajectories oscillating around the energy-minimum point and the other consists of trajectories around the energy-maximum point. Furthermore, there

is at least one boundary (separatrix) between different regions. It is expected that on these boundaries some discontinuities appear with respect to a certain direction of coordinates (it should be noted that in the present case discontinuities appear only in $\tilde{\Phi}_\epsilon$ and do not appear in N_ϵ), and an ordinary perturbative treatment adding some anharmonic corrections to harmonic oscillating solutions around a minimum point (phonons) breaks down.

Acknowledgements

The author would like to express his thanks to Prof. M. Yamamura for his collaborations on which this paper is based, and to Prof. A. Kuriyama for his valuable comments and discussions. He also acknowledges Prof. R. Tamagaki and other members of Nuclear Theory Group of Kyoto University for their interest. This work has been performed as a part of the 1984 annual research projects on "Microscopic Theories of Large Amplitude Collective Motions" organized by the Research Institute for Fundamental Physics, Kyoto University. Numerical calculations were done at the Data Processing Center of Kyoto University.

References

- 1) K. Goeke and P.-G. Reinhard, Eds., "Time-Dependent Hartree-Fock and Beyond", Proceedings Int. Conf. Bad Honnef, Germany, June 1982, Lecture Notes in Physics, Vol.171, (Springer-Verlag, Berlin/New York).
Y. Abe and T. Suzuki, Eds., "Microscopic Theories of Nuclear Collective Motions", Proceedings of the 5th Kyoto Summer Institute, Kyoto, July 1982, Prog. Theor. Phys. Suppl., 74 & 75.
- 2) A.K. Kerman and S.E. Koonin, Ann. of Phys. 100 (1976), 332.
H. Kuratsuji and T. Suzuki, Phys. Lett. 92B (1980), 19.
P. Kramer and M. Saraceno, "Geometry of the Time Dependent Variational Principle in Quantum Mechanics", Lecture Notes in Physics Vol. 140 (Springer-Verlag, Berlin/New York), p.10.
- 3) P. Ring and P. Schuck, "The Nuclear Many Body Problem" (Springer-Verlag, Berlin/New York), p.441.
- 4) D.J. Thouless, Nucl. Phys. 22 (1961), 78.
- 5) R.D. Williams and S.E. Koonin, Nucl. Phys. A391 (1982), 72.
- 6) A. Einstein, Verh. Dt. Phys. Ges. 19 (1917), 82.
M.L. Brillouin, J. de Phys. 7 (1926), 353.
J.B. Keller, Ann. of Phys. 4 (1958), 180.
- 7) M.C. Cambiaggio, G.G. Dussel and M. Saraceno, Nucl. Phys. A415 (1984), 70.
- 8) S. Iida and M. Yamamura, Prog. Theor. Phys. 70 (1983), 783.

- 9) S. Iida and M. Yamamura, Prog. Theor. Phys. 70 (1983), 790.
- 10) J. Hogaasen-Feldman, Nucl. Phys. 28 (1961), 258.
R.A. Broglia and C. Riedel, Nucl. Phys. A107 (1968), 1.
- 11) T. Suzuki, M. Fuyuki and K. Matsuyanagi, Prog. Theor. Phys.
62 (1979), 690.
M. Yamamura and A. Kuriyama, Prog. Theor. Phys. 67 (1982), 1122.
- 12) D.R. Bes and R.A. Broglia, Proceedings of the International
School of Physics, "Enrico Fermi", Course LXIX (1977), p.55.
- 13) M. Yamamura, A. Kuriyama and S. Iida, Prog. Theor. Phys.
72 (1984), No. 3.

Figures Captions

Fig. 1. Classical trajectories (dashed lines) in the $N+\frac{1}{2}-\Psi+\frac{1}{2}$ plane for the case $\Omega=40$, $N=30$ and $\epsilon=0.1 \times G\Omega$. The points \bigcirc and Δ are minima ($\mathcal{E} = \mathcal{E}(L)$) and maxima ($\mathcal{E} = \mathcal{E}(H)$) of energy, respectively. The shape of the trajectories divides the phase space into three parts which are bounded by solid lines (which are trajectories of energy $\mathcal{E}(-)$ and $\mathcal{E}(+)$). The maximum and minimum values of $N+\frac{1}{2}(t)$ along the trajectories are denoted by M_0 and M_1 .

Fig. 2 A region of integral in Eq.(3.1b) is denoted by a hatched area whose boundary is a trajectory of a given energy \mathcal{E} , for the case (a) $\mathcal{E}(L) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(-)$, (b) $\mathcal{E}(-) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(+)$ and (c) $\mathcal{E}(+) < \mathcal{E} < \mathcal{E}(H)$.

Fig. 3 Exact (\times) and classical (\bigcirc) energy eigenvalues for the case $\Omega=40$ $0 \leq N \leq \Omega$ $\epsilon=0.1 \times G\Omega$. Dotted lines denote the values of energy $\mathcal{E} = \mathcal{E}(+)$ and $\mathcal{E}(-)$ where phase changes occur in the classical system. Energies are plotted in units of ϵ

Fig. 4 Diagonal (a) and non-diagonal (b) matrix elements of $\hat{O} = \hat{P}_{+\frac{1}{2}}^+ \hat{P}_{-\frac{1}{2}}$ are plotted versus the action variable J for the case $\Omega=40$ $N=30$ $\epsilon=0.1 \times G\Omega$. Classical results are denoted by solid lines. In (a), $\langle N, \Lambda | \hat{O} | N, \Lambda \rangle$ is denoted by \times , and in (b) \times and Δ denote $\langle N, \Lambda+1 | \hat{O} | N, \Lambda \rangle$ and

$\langle N, \Lambda | \hat{O} | N, \Lambda - 1 \rangle$, respectively which correspond to the both choices in Eq.(3.4). Vertical dotted lines indicate the positions of $J=J(-)$ and $J=J(+)$ which correspond to the energy $\mathcal{E} = \mathcal{E}(-)$ and $\mathcal{E}(+)$, respectively.

Fig. 5 Classical quantities $\mathcal{V}(\sigma)$ (solid lines) and quantal expectation values $\langle N, \Lambda | \hat{\mathcal{Q}}_{\sigma} | N, \Lambda \rangle$ (X) are plotted versus J in (a) ($\sigma = +1/2$) and in (b) ($\sigma = -1/2$) for the case $\Omega = 40$ $N=30$ $\mathcal{E} = 0.1 \times G\Omega$. In the regions $(0, J(-))$ and $(J(+), N/2)$, $\mathcal{V}(+1/2)$ is equal to $\mathcal{V}(-1/2)$. For reference, $\langle N', \Lambda' | \hat{\mathcal{Q}}_{\sigma} | N', \Lambda' \rangle$ for the case $\Omega' = 5 \times \Omega = 200$ $N' = 5 \times N = 150$ $\Lambda' = 5 \times \Lambda$ are denoted by Δ . All values are given in units of \mathcal{E} .

Fig. 6 Transition strength $|\langle f | e^{i\hat{\mathcal{Q}}_{\sigma}} | N, \Lambda \rangle|^2$ are shown in (a) ($\sigma = +1/2$) and in (b) ($\sigma = -1/2$) for the case $\Omega = 40$ $N=30$ $\mathcal{E} = 0.1 \times G\Omega$. The symbols X and Δ denote F_d (the case $|f\rangle = |N+2, \Lambda\rangle$) and F_u (the case $|f\rangle = |N+2, \Lambda+1\rangle$), respectively. The relation of amplitude between F_u and F_d is reversed around $J=J(-)$ for $\sigma = +1/2$ (a) and $J=J(+)$ for $\sigma = -1/2$ (b).

Fig. 7 The quantity λ (solid lines) is plotted versus J for the case $\Omega = 40$ $N=30$ $\mathcal{E} = 0.1 \times G\Omega$. For comparison, $\mathcal{V}(+1/2)$ (dashed lines) and $\mathcal{V}(-1/2)$ (dot-dashed lines) are plotted. In the regions $(0, J(-))$ and $(J(+), N/2)$, λ is equal to $\mathcal{V}(+1/2) = \mathcal{V}(-1/2)$. All values are given in units of \mathcal{E} .

Fig. 8 Schematic figures of excited pairing rotational bands.

The states belonging to the same band are connected by dashed lines. Dotted lines denote the values of energy $\mathcal{E} = \mathcal{E}(+)$ and $\mathcal{E}(-)$.

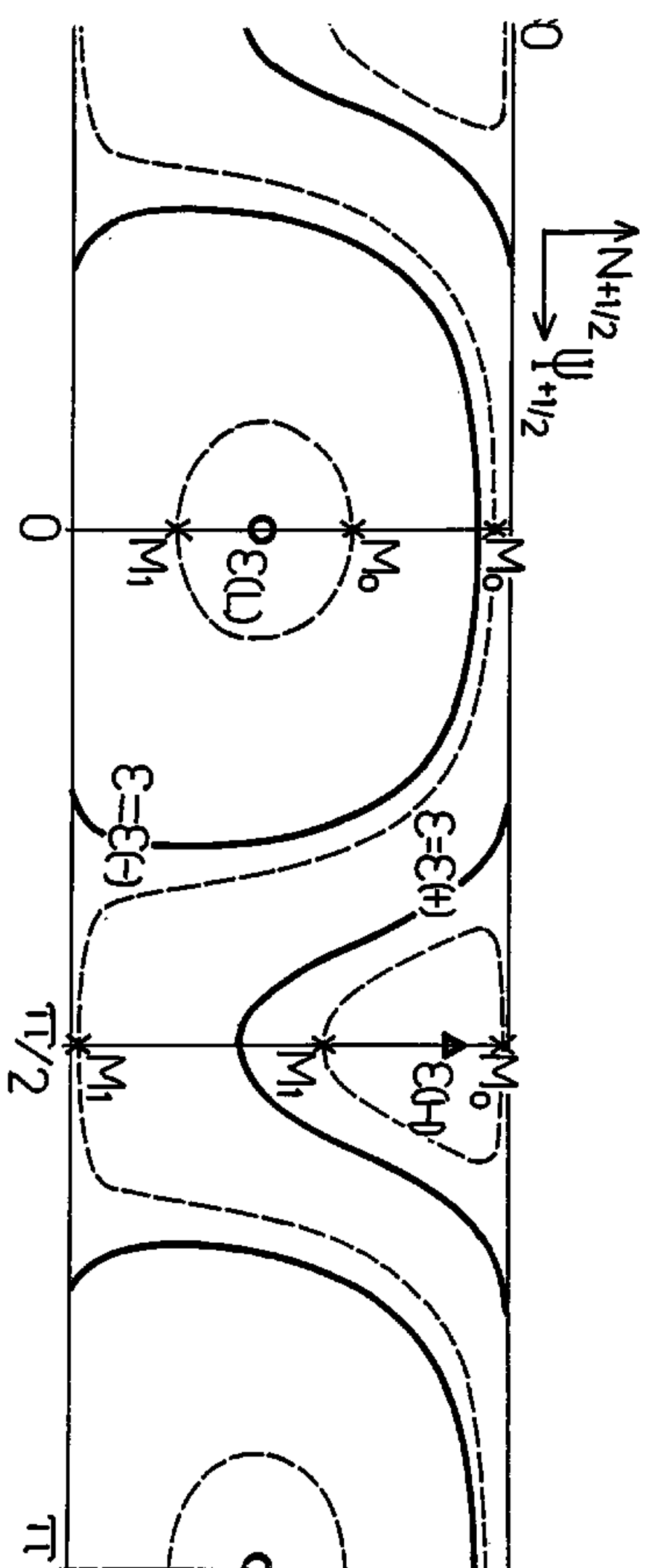


Fig 1

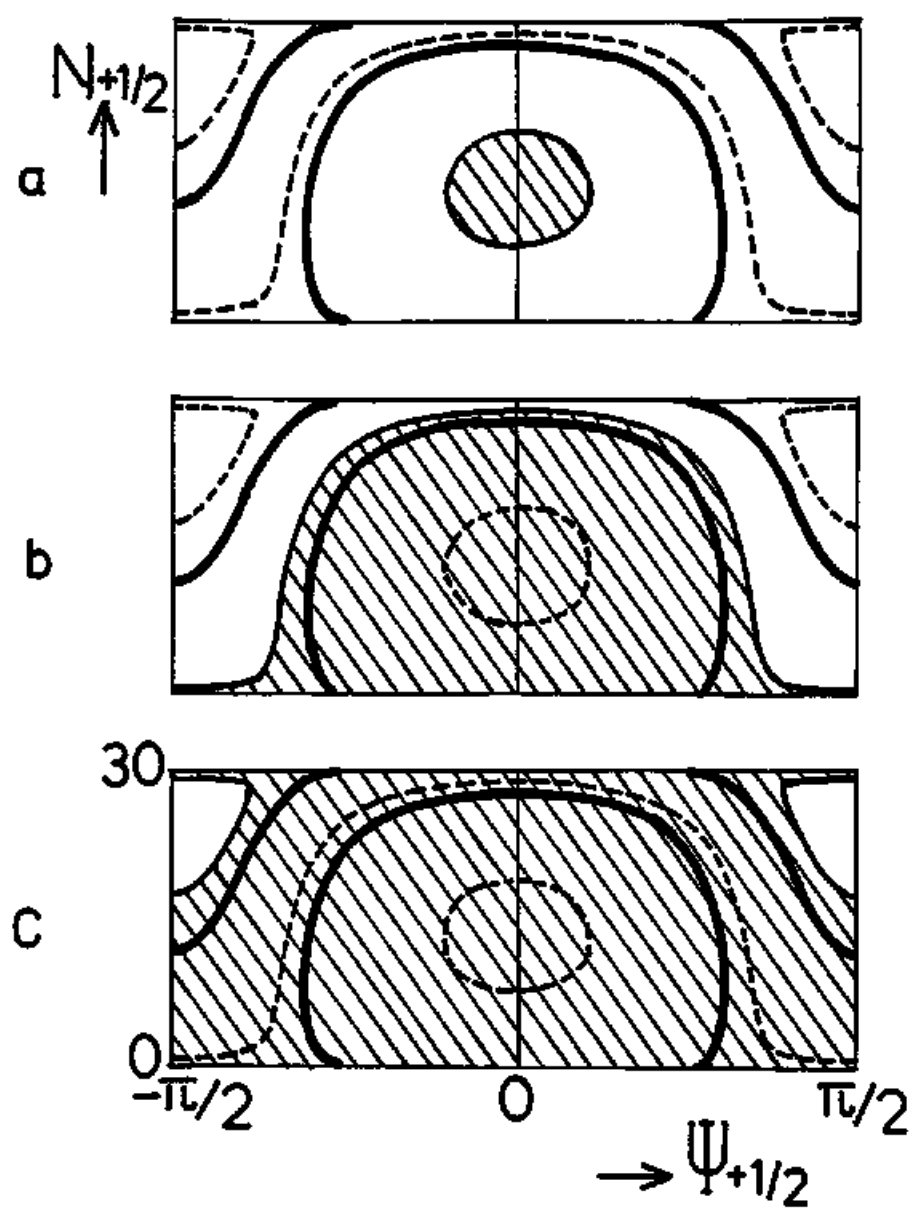


Fig 2

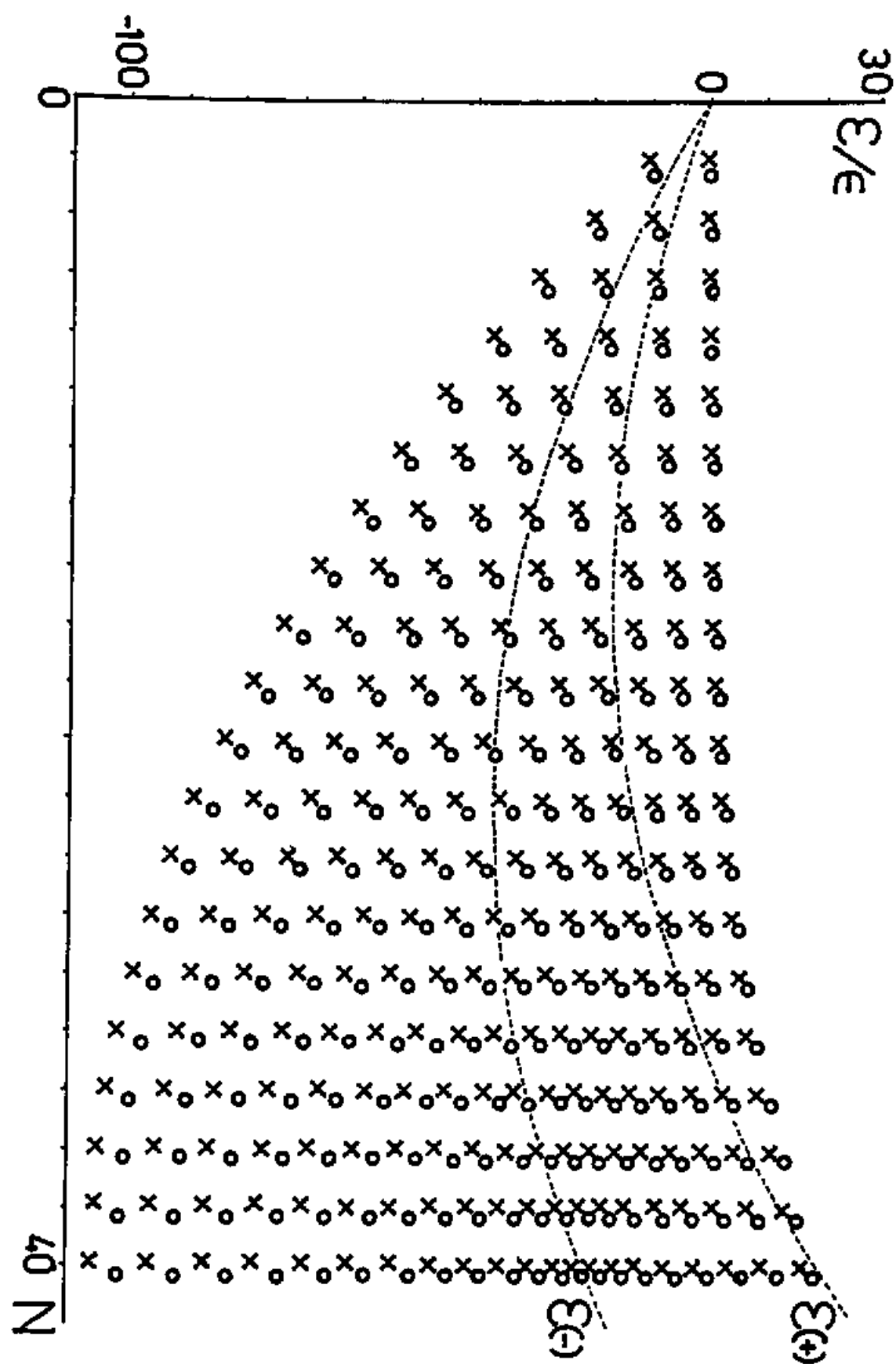


Fig. 3

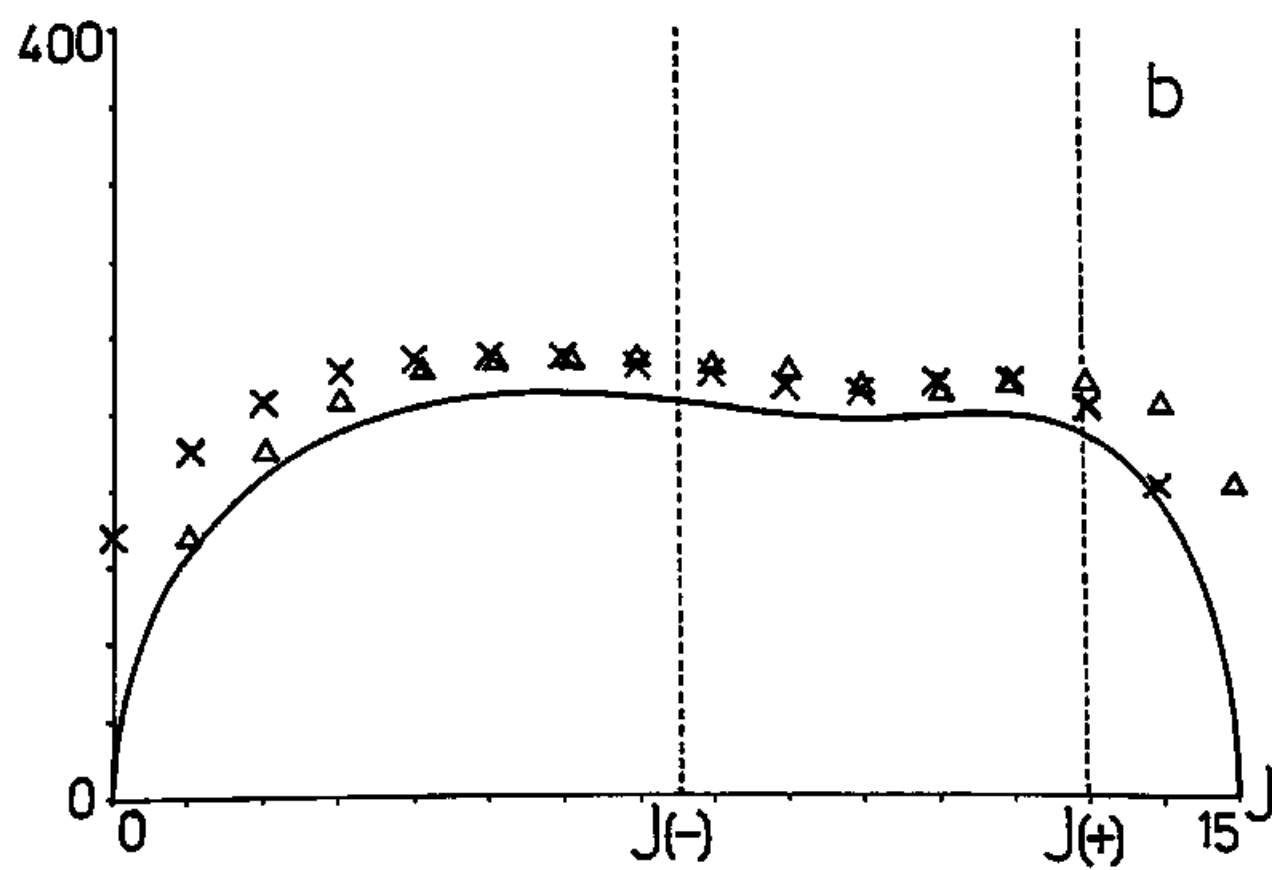
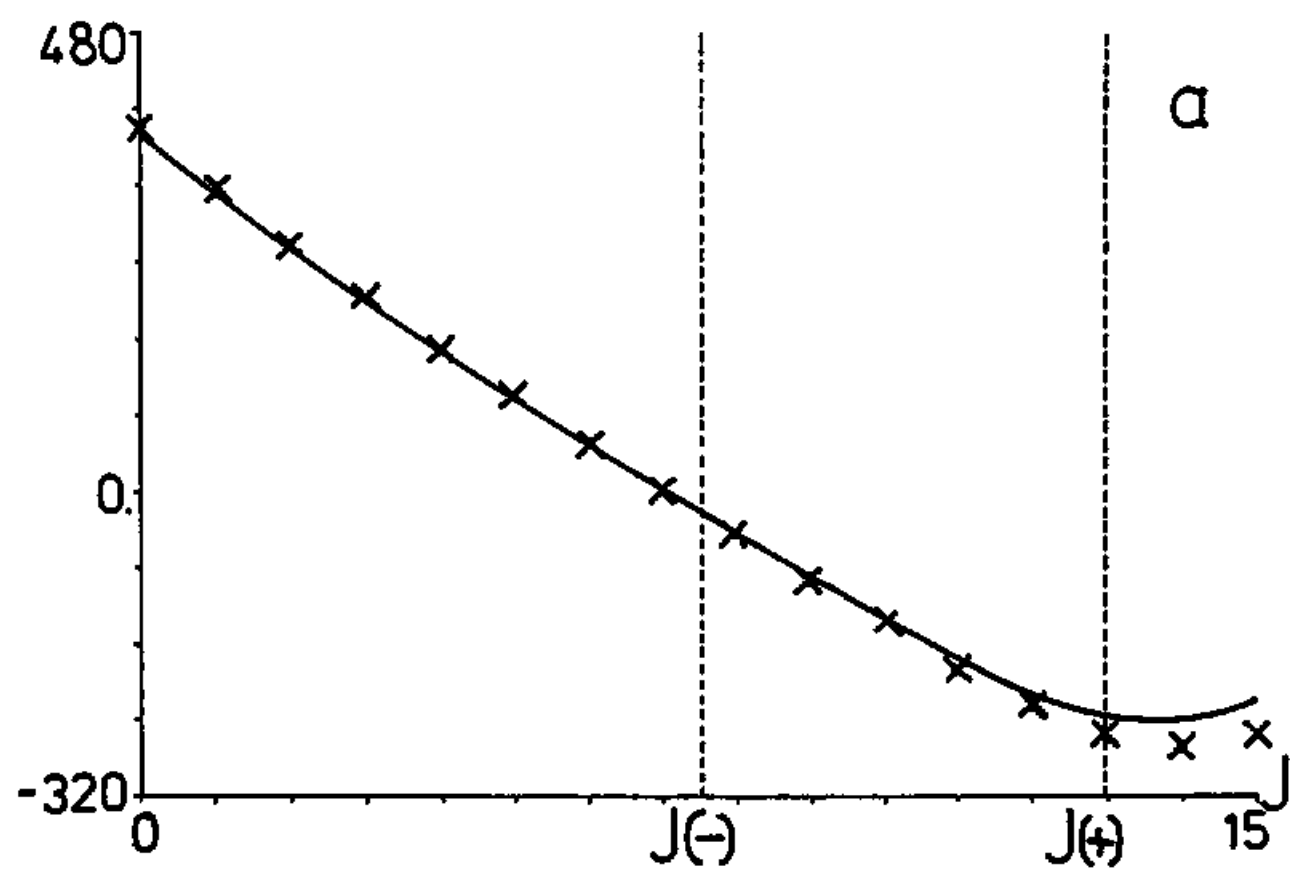
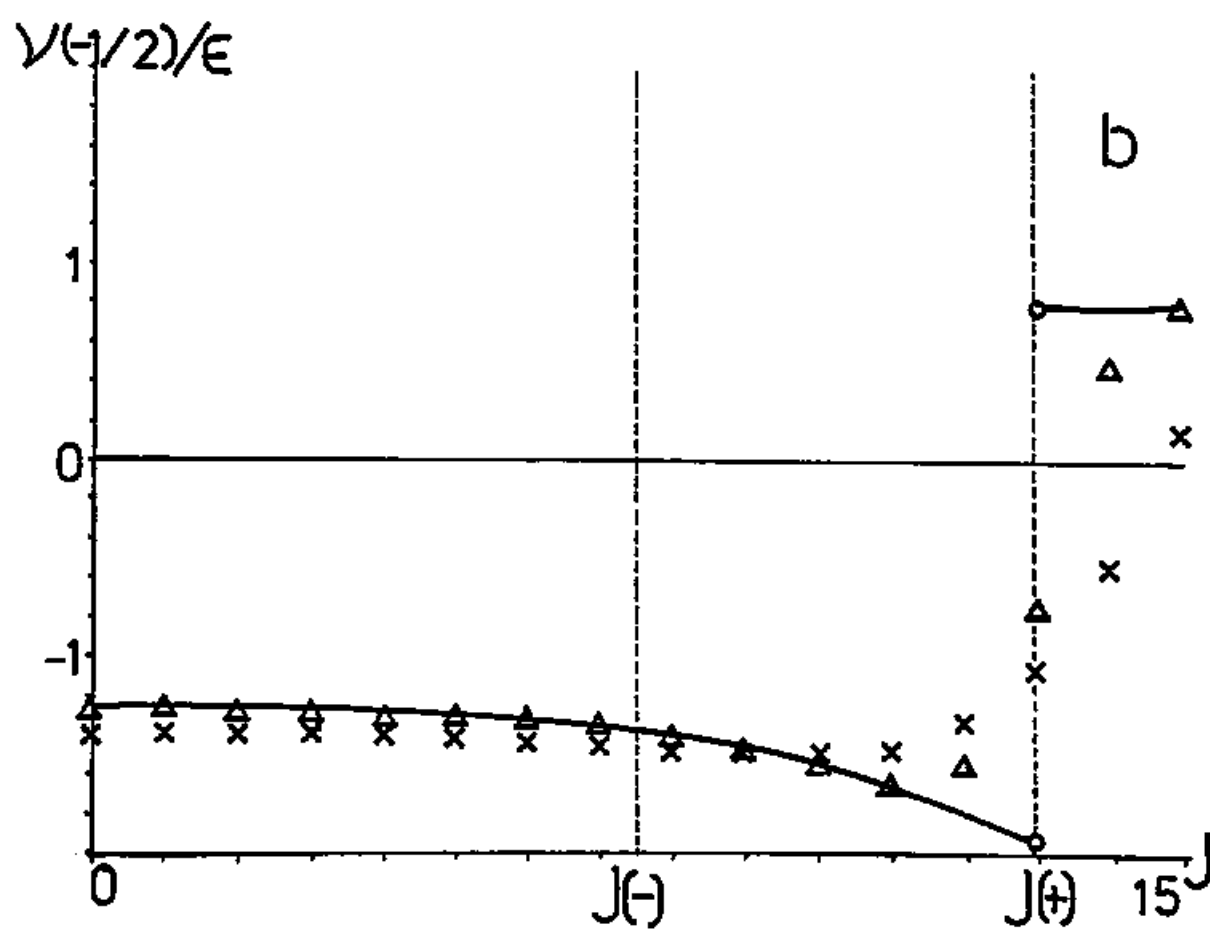
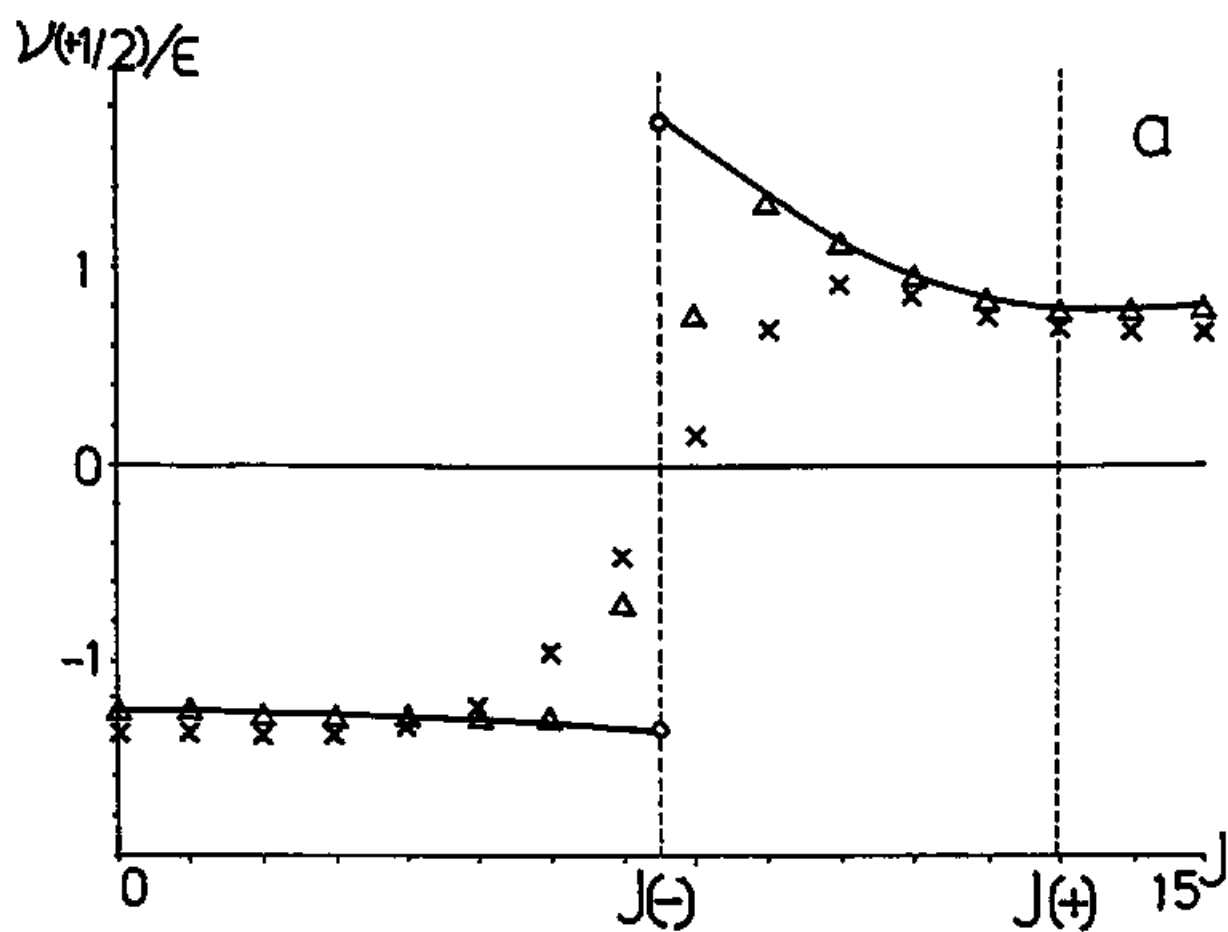


Fig. 4



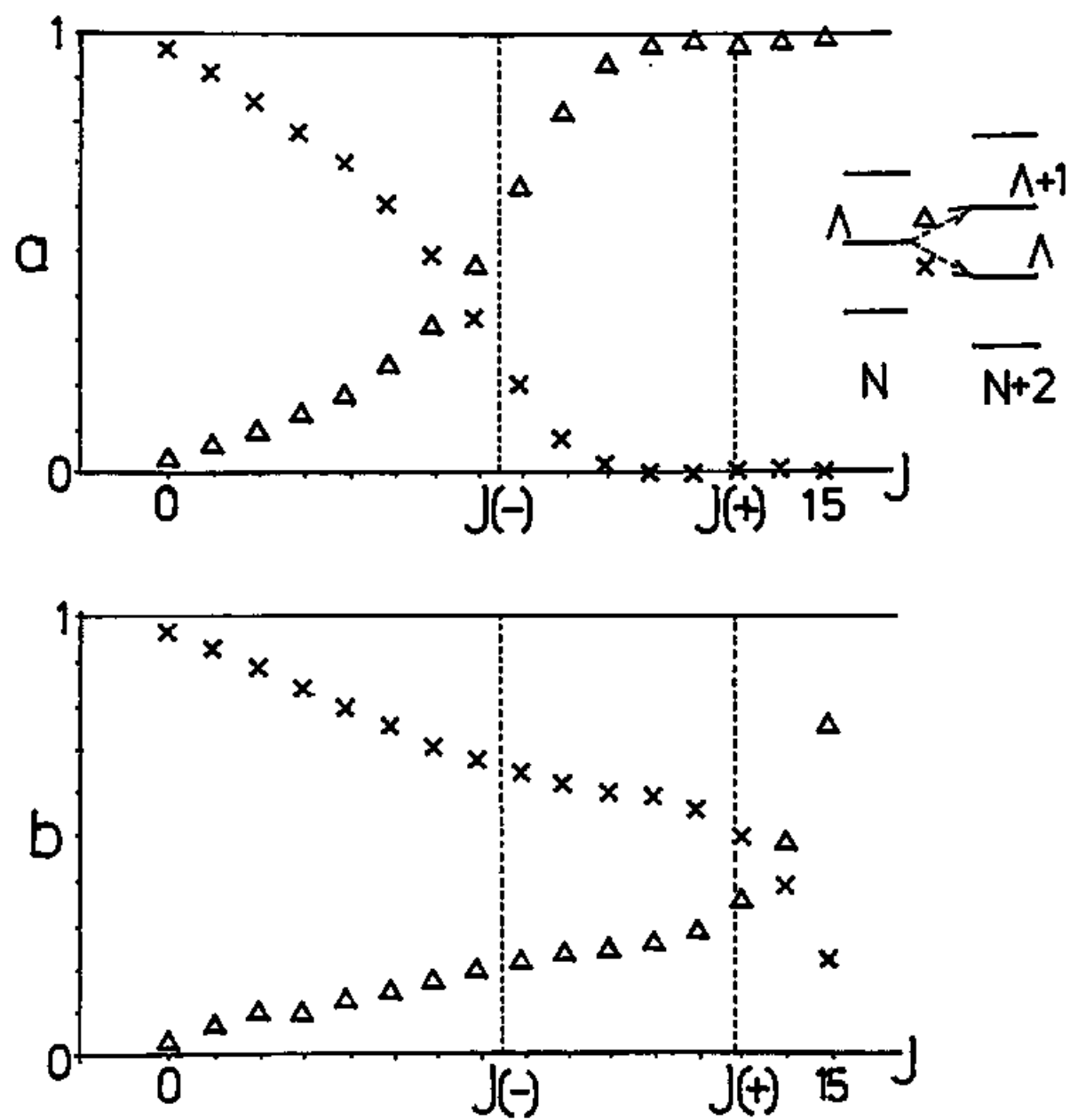


Fig. 6

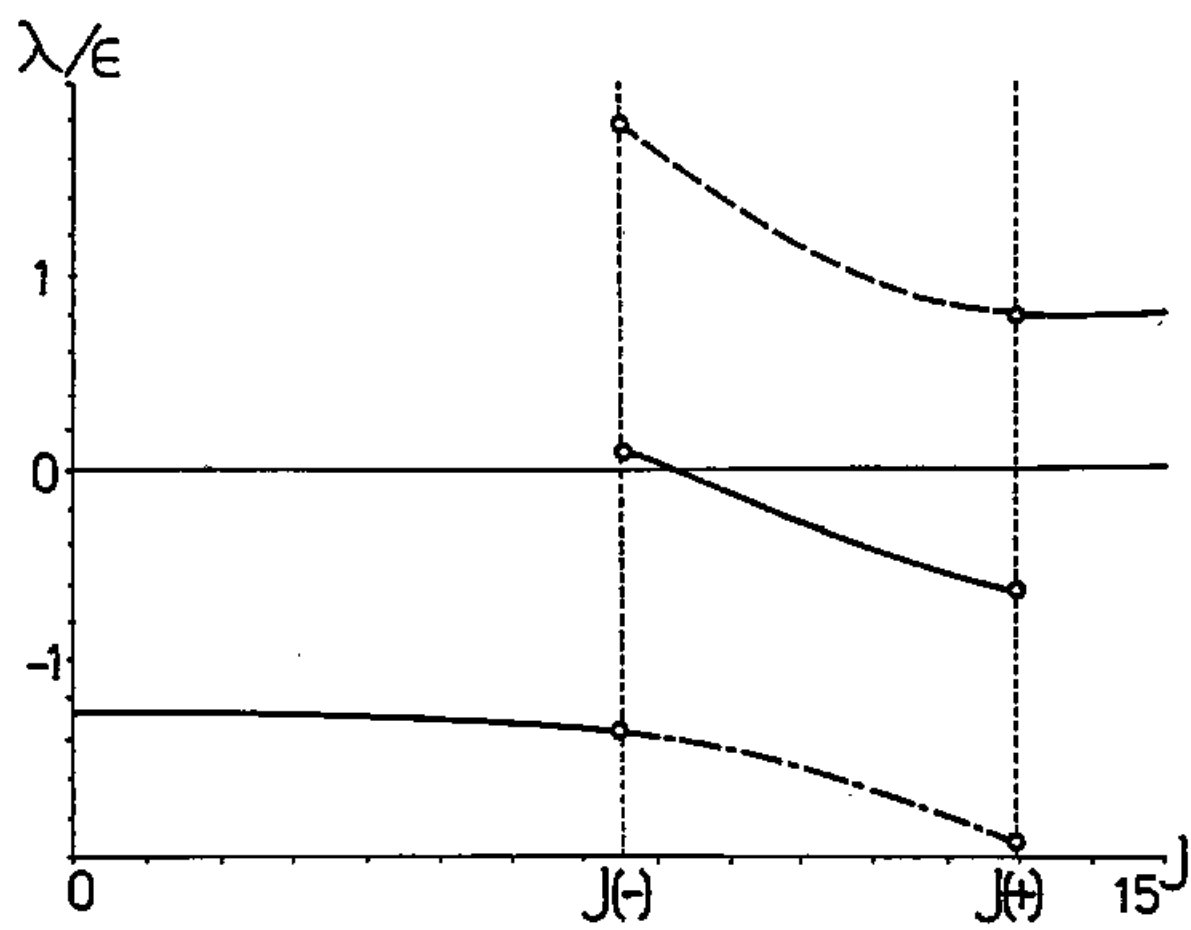


Fig 7

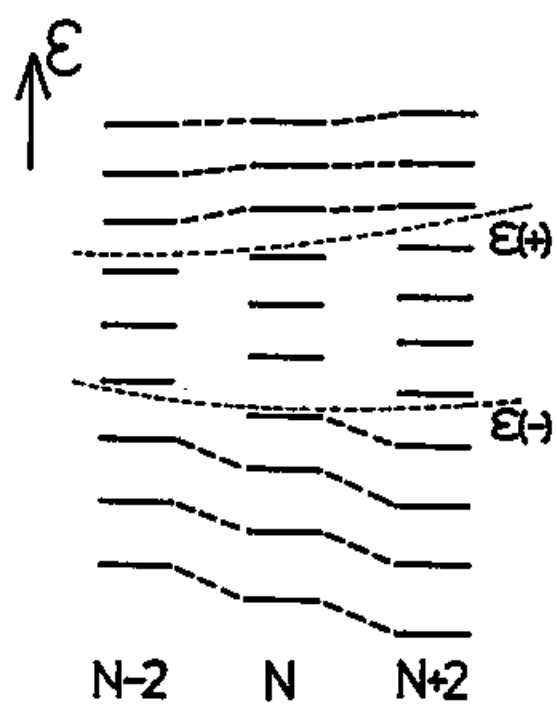


Fig. 8